Inhalt

Lineare Funktionen (Geraden)

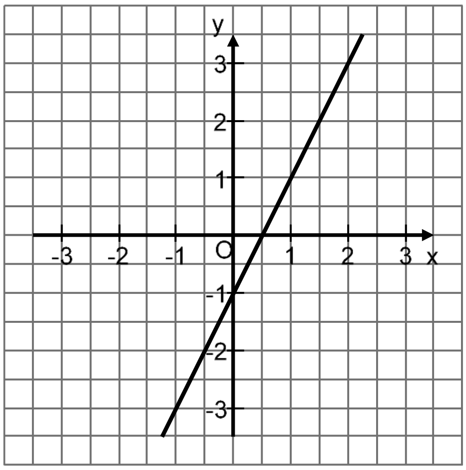
Eine Funktion der Form $y = mx + c$ heißt lineare Funktion. Das Schaubild einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Zahl m heißt <u>Steigung</u> der Geraden, die Zahl c heißt <u>y-Achsenabschnitt</u>.

<u>Beispiel</u>:

$y = 2x - 1$ soll gezeichnet werden.

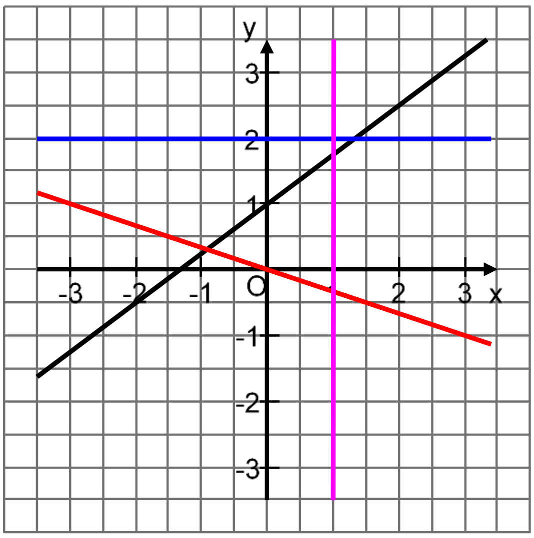
Vorgehen im Koordinatensystem:

- Beginne mit dem y-Achsenabschnitt. Zeichne auf der y-Achse in der Höhe -1 ein Kreuz ein.
- Gehe von diesem Kreuz aus 1 Einheit in x-Richtung und 2 Einheiten in y-Richtung (Steigung)



<u>Weitere Beispiele</u>:

$y = \frac{3}{4}x + 1$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{3}x$ $\qquad$ $y = 2$ $\qquad$ $x = 1$



<u>Nullstelle</u> (Schnittpunkt mit der x-Achse): Setze für y Null ein.

<u>Beispiel:</u> Nullstelle von $y = 2x - 1$:

$0 = 2x - 1 \quad |+1$

$1 = 2x \quad |:2$ $\qquad$ die Nullstelle liegt also bei $x = \frac{1}{2}$ (siehe Schaubild oben)

$\frac{1}{2} = x$

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus zwei linearen Gleichungen mit den beiden Variablen x und y. Eine lineare Gleichung kann im Koordinatensystem als Gerade dargestellt werden. Dazu wird die lineare Gleichung nach y aufgelöst.

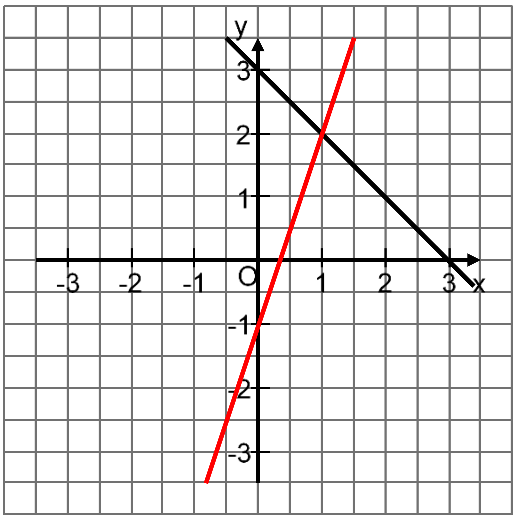
<u>Beispiel:</u>

(I) $x + y = 3$
(II) $-3x + y = -1$

dies ist ein LGS

<u>Zeichnerische Lösung des LGS</u> (löse dazu Gleichung (I) und (II) nach y auf):

(I) $y = -x + 3$
(II) $y = 3x - 1$



Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist die Lösung des LGS.

Hier ist also die Lösungsmenge: $L = \{(1|2)\}$

Ein LGS hat nicht immer genau eine Lösung. Manchmal hat es auch keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

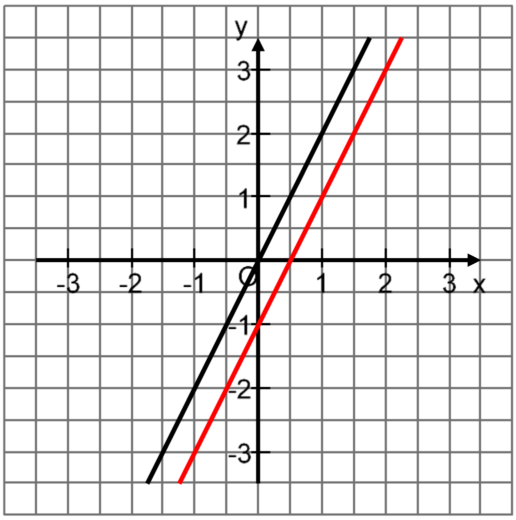
<u>Beispiele:</u>

1) Keine Lösung

(I) $y = 2x$
(II) $y = 2x - 1$

Lösungsmenge:

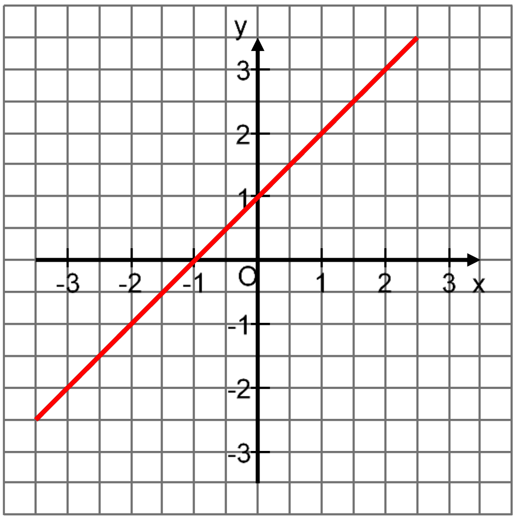
$L = \{\ \}$



2) Unendlich viele Lösungen

(I) $y = x + 1$

(II) $y = x + 1$



Lösungsmenge:

$L = \{(x \mid y) \mid y = x + 1\}$

Lies: Alle Zahlenpaare (x|y),

für die gilt $y = x + 1$

<u>Rechnerische Lösungsverfahren für LGS</u>

Das Lösen linearer Gleichungssysteme mit Hilfe einer Zeichnung ist oft aufwändig und ungenau. Besser sind rechnerische Lösungsverfahren. Je nach Aufgabenstellung bietet sich eins der drei Lösungsverfahren an: Das Gleichsetzungsverfahren, das Einsetzungsverfahren oder das Additionsverfahren.

<u>Beispiele:</u>

1) **Gleichsetzungsverfahren**

(I) $4y = 2x - 3$

(II) $4y = -\frac{1}{2}x + 2$

Setze (I) mit (II) <u>gleich</u>:

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad \left| +3 \right.$$

$$2x = -\frac{1}{2}x + 5 \qquad \left| +\frac{1}{2}x \right.$$

$$\frac{5}{2}x = 5 \qquad \left| \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \right.$$

$\boxed{x = 2}$ in (I): (auch möglich, in (II) einzusetzen)

$$4y = 2 \cdot 1 - 3$$

$$4y = -1 \qquad \left| :4 \right.$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}} \qquad \Rightarrow L = \left\{\left(2 \mid -\frac{1}{4}\right)\right\}$$

2) **Einsetzungsverfahren**

(I) $y = x + 2$
(II) $2x + 3y = 1$

Setze (I) in (II) <u>ein</u>:

$2x + 3 \cdot (x + 2) = 1$

$2x + 3x + 6 = 1 \quad | -6$

$5x = -5 \quad |:5$

$\boxed{x = -1}$ in (I):

$y = -1 + 2$

$\boxed{y = 1} \qquad \Rightarrow L = \{(-1|1)\}$

3) **Additionsverfahren**

(I) $2x - 2y = 14$
(II) $-2x - 3y = -4$ +

$-5y = 10 \quad |:(-5)$

$\boxed{y = -2}$ in (I):

$2x - 2 \cdot (-2) = 14$

$2x + 4 = 14 \quad | -4$

$2x = 10 \quad |:2$

$\boxed{x = 5} \qquad \Rightarrow L = \{(2|-2)\}$

Weiteres Beispiel zum Additionsverfahren:

(I) $2x + 3y = 8 \quad | \cdot 2$
(II) $3x + 2y = 7 \quad | \cdot (-3)$ (Bringe auf Gegenzahlen, hier für y)

(I) $4x + 6y = 16$
(II) $-9x - 6y = -21$ +

$-5x = -5 \quad |:(-5)$

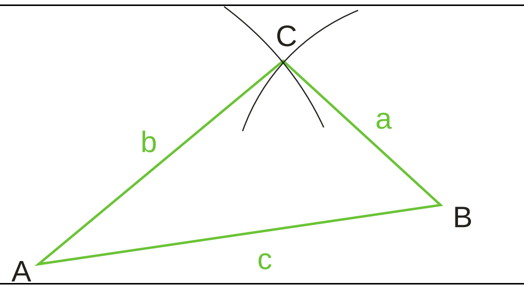
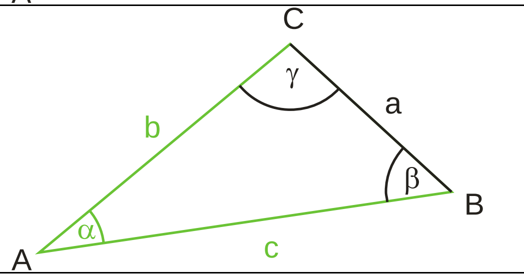
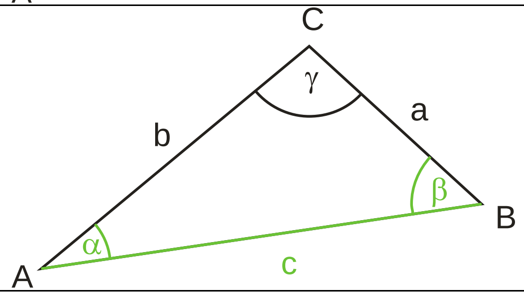
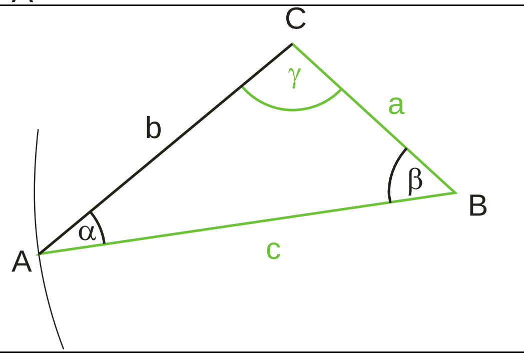
$\boxed{x = 1}$ in (I):

$2 \cdot 1 + 3y = 8 \quad | -2$

$3y = 6 \quad |:3 \qquad \boxed{y = 2} \qquad \Rightarrow L = \{(1|2)\}$

Kongruenz von Dreiecken

Zwei Dreiecke heißen kongruent (deckungsgleich), wenn jedes der Dreiecke beim Übereinanderlegen das andere Dreieck vollständig bedeckt. Anstelle des Übereinanderlegens kann man auch einfacher bestimmte Größen im Dreieck messen und damit prüfen, ob die Dreiecke kongruent sind. Zwei Dreiecke sind immer dann kongruent, wenn einer der vier folgenden Kongruenzsätze gilt. Wenn also zwei Dreiecke in den jeweils drei Größen übereinstimmen, sind sie kongruent.

Kongruenzsatz	Konstruktion	Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie …
Seite-Seite-Seite (sss)		… in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen.
Seite-Winkel-Seite (sws)		… in zwei Seitenlängen und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
Winkel-Seite-Winkel (wsw)		… in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen.
Seite-Seite-Winkel (Ssw)		… in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite S gegenüberliegt

Beachte bei der Konstruktion immer die richtige Beschriftung des Dreiecks ABC gegen den Uhrzeigersinn!

Quadratwurzel – reelle Zahlen

Die Schreibweise $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$ usw. steht für jeweils diejenige positive Zahl, deren Quadrat 2; 7 usw. ergibt. Zu $\sqrt{2}$ sagt man Quadratwurzel aus 2.
Die Zahl unter dem Wurzelzeichen nennt man auch Radikand.
Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens.
Fast alle Wurzeln kann man nicht als Bruch darstellen. Diese Zahlen werden irrationale Zahlen genannt.

Rechenregeln für Quadratwurzeln:

<u>Multiplizieren:</u> $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ Beispiel: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

<u>Dividieren:</u> $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ Beispiel: $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$

<u>Addieren:</u> $r\cdot\sqrt{a}+s\cdot\sqrt{a}=(r+s)\cdot\sqrt{a}$ Beispiel: $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

<u>Subtrahieren:</u> $r\cdot\sqrt{a}-s\cdot\sqrt{a}=(r-s)\cdot\sqrt{a}$ Beispiel: $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

Beachte hierbei, dass sich Summen und Differenzen von Quadratwurzeln nur bei gleichen Radikanden zusammenfassen lassen. Es gilt also <u>nicht</u>:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ Beispiel: $\underbrace{\sqrt{9}}_{=3}+\underbrace{\sqrt{16}}_{=4}\neq\sqrt{9+16}=\underbrace{\sqrt{25}}_{=5}$

Vereinfachen von Wurzeltermen:

Um Terme mit Wurzeln zusammenfassen zu können werden häufig die Hilfsmittel „Teilweises Wurzelziehen“ und „Rationalmachen des Nenners“ verwendet

<u>Teilweises Wurzelziehen:</u>
Zerlege die Zahl unter der Wurzel in ein Produkt. Achte dabei darauf, dass ein Faktor eine möglichst große Quadratzahl ist
Beispiel: $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{5}$

<u>Rationalmachen des Nenners:</u>
Steht im Nenner eines Bruches eine Quadratwurzel, so kann man den Nenner rational machen, indem man den Bruch passend erweitert.

Beispiele:

1) $$\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{=1}=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

2) $$\frac{1}{5-\sqrt{3}}=\frac{1}{5-\sqrt{3}}\cdot\underbrace{\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}}_{=1}=\frac{5+\sqrt{3}}{25-3}=\frac{5+\sqrt{3}}{22}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperiment:

Bei einem <u>Zufallsexperiment</u> sind immer mindestens zwei Ergebnisse oder Ausgänge möglich. Die Ergebnisse $e_1;e_2;...;e_n$ werden in der Ergebnismenge $S=\{e_1;e_2;...;e_n\}$ zusammengefasst.

Beispiele:

Würfelwurf: Ergebnisse: 1; 2; 3; 4; 5; 6 und Ergebnismenge: $S=\{1;2;3;4;5;6\}$

Münzwurf: Ergebnisse: Wappen; Zahl und Ergebnismenge: $S=\{W;Z\}$

Laplace-Experiment:

Zufallsexperimente, bei denen man den verschiedenen möglichen Ergebnissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen kann, bezeichnet man als <u>Laplace-Experimente</u>.

Beispiele:

Wurf mit idealer Münze, idealem Würfel.

Kein Laplace-Experiment: Glücksrad mit unterschiedlich großen Sektoren

Laplace-Regel

Bei einem Laplace-Experiment beträgt die Wahrscheinlichkeit P(E) für ein Ereignis E:

$$P(E)=\frac{\text{Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse des Laplace-Experiments}}$$

Beispiel:

$$\text{Würfelwurf}\ P(\text{gerade Augenzahl})=\frac{\#\{2;4;6\}}{\#\{1;2;3;4;5;6\}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(# steht für Anzahl der Elemente der Menge)

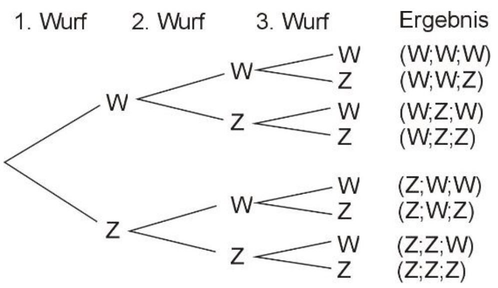
Mehrstufige Zufallsexperimente - Baumdiagramme

Zweimaliges Würfeln (n = 2) oder sechsfaches Ziehen (n = 6) einer Kugel wie beim Lotto sind Beispiele für <u>mehrstufige Zufallsexperimente</u>. Man fasst sie als ein einziges Zufallsexperiment auf. Ergebnismengen von mehrstufigen Zufallsexperimenten kann man mit Hilfe von <u>Baumdiagrammen</u> bestimmen.

Beispiel:

Mehrstufiges Zufallsexperiment: Ideale Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

Baumdiagramm mit Ergebnissen:



Pfadregeln:

Pfadmultiplikationsregel: (siehe Beispiel 1 unten)

Im Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Pfades, indem man die Wahrscheinlichkeiten seiner Teilstrecken multipliziert.

Pfadadditionsregel: (siehe Beispiel 2 unten)

Wenn zu einem Ereignis mehrere Pfade gehören, dann ist die Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.

Komplementärregel: (siehe Beispiel 3 unten)

Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Beispiele:

1) $P(\text{3x Wappen}) = P(WWW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2) $P(\text{mindestens 2x Wappen}) = P(WWW) + P(WWZ) + P(WZW) + P(ZWW)$

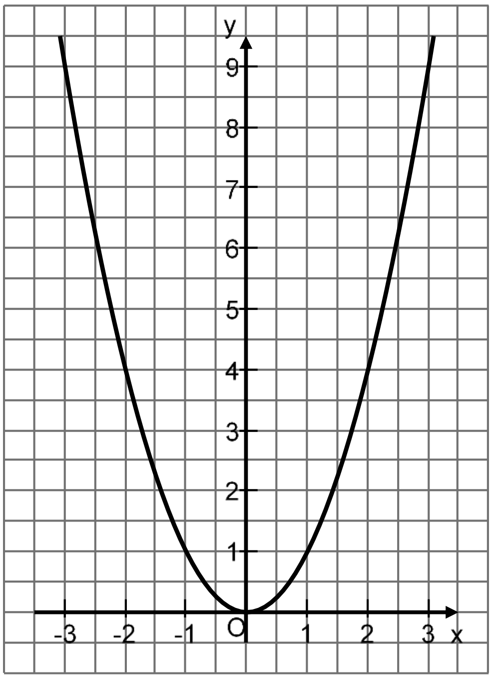
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3) $P(\text{mindestens 1x Wappen}) = 1 - P(\text{kein Wappen}) = 1 - P(ZZZ) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Quadratische Funktionen

Normalparabel:

Das Schaubild der Quadratfunktion $f(x) = x^2$ heißt Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(0\,|\,0)$.

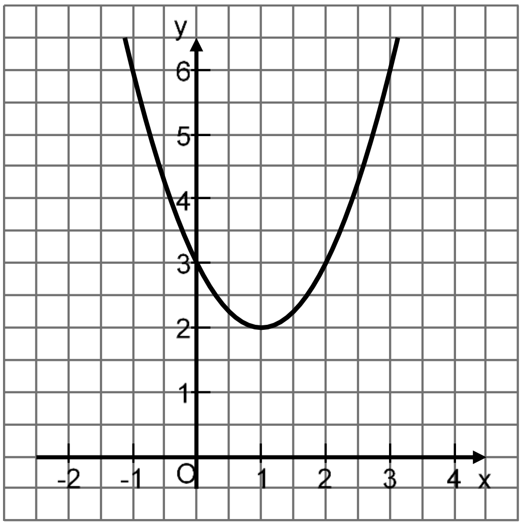


Verschobene Normalparabel:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = (x-d)^2 + e$ ist eine Normalparabel

mit dem Scheitelpunkt $S(d\,|\,e)$.

Beispiel: $f(x) = (x-1)^2 + 2$ hat den Scheitelpunkt: $S(1\,|\,2)$



Gestreckte und gestauchte Parabel:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = ax^2$ heißt Parabel (für a = 1 Normalparabel).

Das Schaubild hat den Scheitelpunkt $S(0 \mid 0)$ und ist symmetrisch zur y-Achse.

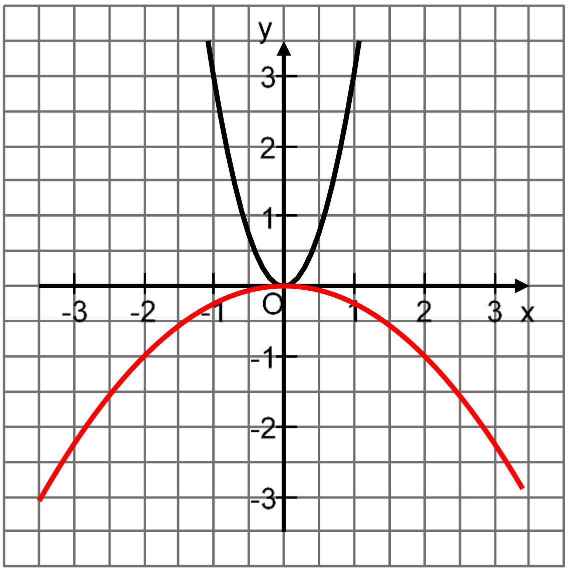
Für $|a| > 1$ ist das Schaubild im Vergleich zur Normalparabel gestreckt.

Für $|a| < 1$ ist das Schaubild im Vergleich zur Normalparabel gestaucht.

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.

Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.

Beispiele: $f(x) = 3x^2$; $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$



Gestreckte und verschobene Parabel:

Das Schaubild der Funktion $f(x) = a(x-d)^2 + e$ ist eine Parabel

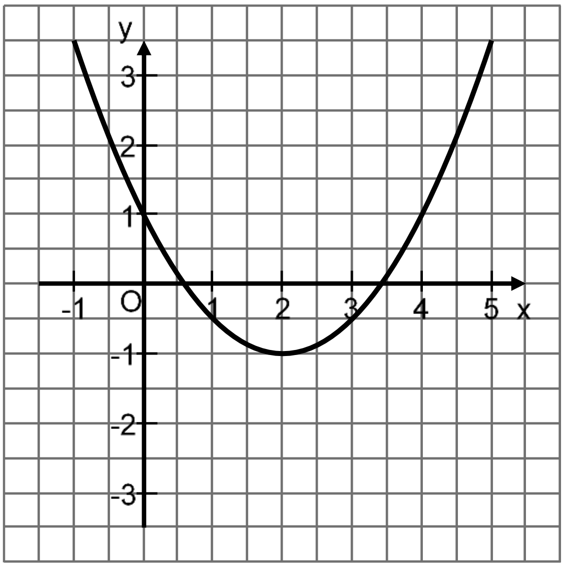
mit dem Scheitelpunkt $S(d \mid e)$.

Die Parabel ist um den Faktor a zur Normalparabel gestreckt.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$

hat den Scheitelpunkt $S(2 \mid -1)$ und

ist um den Faktor $\frac{1}{2}$ im Vergleich zur Normalparabel gestreckt.



<u>Vorgehen beim Zeichnen:</u>

(1) Scheitelpunkt einzeichnen.

(2) Vom Scheitelpunkt ausgehen 1 nach rechts bzw. links und $\frac{1}{2}$ statt 1 nach oben,

dann 2 nach rechts bzw. links und 2 statt 4 nach oben

usw.

Von der Normalform auf die Scheitelpunktform:

Manchmal ist die quadratische Funktion nicht in der Scheitelpunktform $f(x) = a(x-d)^2 + e$ gegeben sondern in der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Dann muss die Funktionsgleichung zunächst auf Scheitelpunktform gebracht werden.

Beispiele: <u>Normalform in Scheitelpunktform</u>

1) $f(x) = x^2 - 6x + 2$

$f^*(x) = x^2 - 6x$

Nullstellen von $f^*(x)$:

$x^2 - 6x = x \cdot (x-6) = 0$
$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 6$

Mitte: $\boxed{x = 3}$

$f(3) = -7 \Rightarrow \boxed{y = -7}$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(3\,|\,-7)$

Scheitelpunktform: $f(x) = (x-3)^2 - 7$

Diese kann dann wieder mit Hilfe des Scheitelpunkts gezeichnet werden.

2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

$f^*(x) = 2x^2 - 4x$

Nullstellen von $f^*(x)$:

$2x^2 - 4x = x \cdot (2x-4) = 0$
$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2$

Mitte: $\boxed{x = 1}$

$f(1) = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(1\,|\,2)$

Scheitelpunktform: $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ (beachte den Streckfaktor!)

Diese kann dann wieder mit Hilfe des Scheitelpunkts gezeichnet werden.

Beachte bei der Zeichnung den Streckfaktor!

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen haben die Form $x^2 + px + q = 0$.

Quadratische Gleichungen können mit einer Lösungsformel gelöst werden:

$$x_{1/2} = -\square \pm \sqrt{\square^2 - \square}$$

Die Zahl, die ohne x steht

Die Hälfte der Zahl,
die vor dem x steht

(oder mit p und q ausgedrückt: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel))

Beispiele:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$

$x_1 = 1$ oder $x_2 = -3$

2) $-3x^2 + 6x - 3 = 0 \quad |:(-3)$ (Normieren: Die Zahl vor x^2 muss 1 sein)

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{(1)^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$

$x = 1$

3) $2x^2 = 8 \quad |:2$

$x^2 = 4$ (keine Lösungsformel nötig!)

$x_1 = 2$ oder $x_2 = -2$

4) $x^2 + 2x = 0$ (keine Lösungsformel nötig, ausklammern reicht aus!)

$x \cdot (x+2) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x_1 = 0$ oder $x_2 = -2$

Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen

Beispiele:

1) Biquadratische Gleichung

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(1) Substitution (Ersetzung): $x^2 = u$, $(x^4 = u^2)$

(2) Lösen von $u^2 - 13u + 36 = 0$ (quadratische Gleichung)

$$u_{1/2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$u_1 = 9$ oder $u_2 = 4$

(3) Rücksubstitution: $u = x^2$

$x^2 = 9$ oder $x^2 = 4$

$x_1 = 3$ oder $x_2 = -3$ oder $x_3 = 2$ oder $x_4 = -2$

2) Bruchgleichung

(1) $x + \frac{3}{2} - \frac{1}{x} = 0 \quad |\cdot 2x$ (Multipliziere mit Hauptnenner)

(2) Lösen von $2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad |:2$ (quadratische Gleichung)

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$x_1 = \frac{1}{2}$ oder $x_2 = -2$

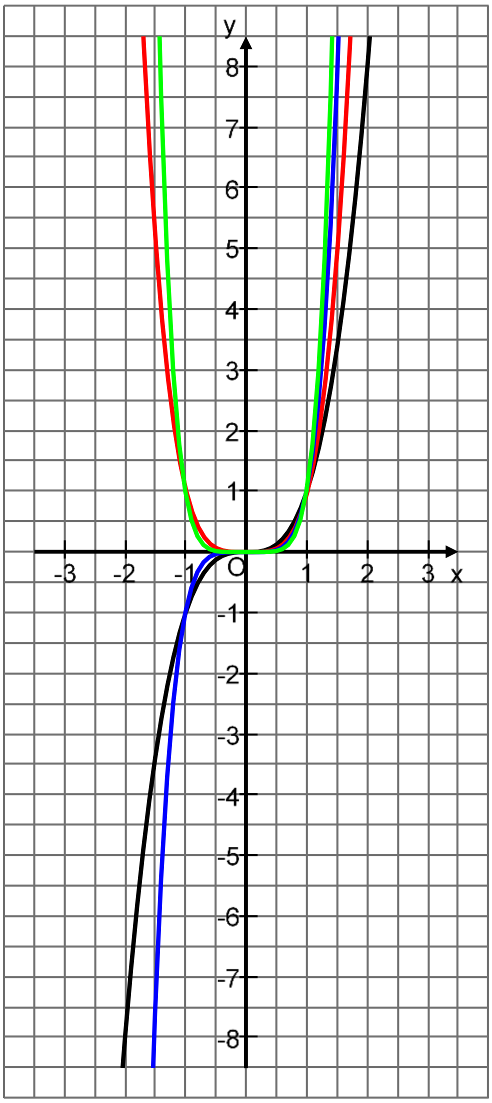
Potenzfunktionen

Die Funktion $f(x) = x^n$ heißt Potenzfunktion.

Das Schaubild der Potenzfunktion heißt Parabel n-ter Ordnung.

Falls n gerade ist, ist das Schaubild achsensymmetrisch zur y-Achse.

Falls n ungerade ist, ist das Schaubild punktsymmetrisch zum Ursprung.



$f(x) = x^3$

$g(x) = x^4$

$h(x) = x^5$

$i(x) = x^6$