Inhalt

Potenzen

Potenzen mit natürlichen Hochzahlen:
Als Potenz bezeichnet man die Kurzschreibweise a^n .

$a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^2 = a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$; ...

$a^n = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$

a^n: Exponent (Hochzahl) n, Basis (Grundzahl) a

Exponent (Hochzahl)

Basis (Grundzahl)

Beispiele:

1) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 Faktoren}} = 8$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{\text{4 Faktoren}} = \frac{16}{81}$

3) $(-4)^3 = \underbrace{(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)}_{\text{3 Faktoren}} = -64$

Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; ...

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispiele:

1) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{1} = 8$ oder $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 8$

Norm- und Dezimaldarstellung:

Normdarstellung		*Dezimaldarstellung*	*Kommaverschiebung*
$2 \cdot 10^9$	**=**	$2.\underbrace{000.000.000}_{\text{9 Nullen}}$	Komma um 9 Stellen nach rechts verschoben
$4 \cdot 10^{-5}$	**=**	$\underbrace{0,0000}_{\text{5 Nullen}}4$	Komma um 5 Stellen nach links verschoben
$3{,}14 \cdot 10^5$	**=**	314.000	Komma um 5 Stellen nach rechts verschoben
$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	**=**	0,00017	Komma um 4 Stellen nach links verschoben

Vorsilben:

Potenz	Mathematische Vorsilbe	Vorsilbe bei Maßeinheiten	Abkürzung
10^2	*Hundert*	*Hekto*	*h*
10^3	*Tausend*	*Kilo*	*k*
10^6	*Million*	*Mega*	*M*
10^9	*Milliarde*	*Giga*	*G*
10^{12}	*Billion*	*Tera*	*T*
10^{-1}	*zehntel*	*Dezi*	*d*
10^{-2}	*hundertstel*	*Zenti*	*c*
10^{-3}	*tausendstel*	*Milli*	*m*
10^{-6}	*millionstel*	*Mikro*	*µ*
10^{-9}	*milliardstel*	*Nano*	*n*
10^{-12}	*billionstel*	*Piko*	*p*

Rechenregeln für Potenzen:

Addieren und Subtrahieren von Potenzen:

Eine Summe oder Differenz von Potenzen kann man nur vereinfachen,

wenn die Summanden gleiche Basis und gleiche Hochzahlen haben:

$$r \cdot a^n + s \cdot a^n = (r+s) \cdot a^n$$

Beispiel:

$$3 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^4 = 8 \cdot 2^4$$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen:

1. Potenzgesetz: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man die Hochzahlen addiert (subtrahiert) und die Basis beibehält.

2. Potenzgesetz: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden multipliziert (dividiert), indem man die Basen multipliziert (dividiert) und die Hochzahl beibehält.

Beispiele:

1) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$; $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

2) $6^3 \cdot 2^3 = (6 \cdot 2)^3 = 12^3$; $6^3 : 2^3 = (6:2)^3 = 3^3$

Potenzieren von Potenzen

3. Potenzgesetz: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$

Potenzen werden potenziert, indem die Hochzahlen multipliziert werden.

Beispiele:

1) $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$

2) $\left((-2)^3\right)^2 = (-2)^6 = 64$

3) $\left(-2^2\right)^3 = (-4)^3 = -64$

Potenzen mit rationalen Hochzahlen - n-te Wurzel

Hochzahlen bei Potenzen können auch Brüche sein und Potenzen können auch als Wurzeln geschrieben werden:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiele:

1) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ (lies: 3te Wurzel aus 2)

2) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

3) $4^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{4^3}}$

4) $5^{1,5} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$

Die drei Potenzgesetze gelten auch für rationale Hochzahlen.

Beispiele:

1) $x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$; $x^{\frac{4}{3}} : x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ (1. Potenzgesetz)

2) $(8)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$; $(8)^{\frac{1}{2}} : (2)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ (2. Potenzgesetz)

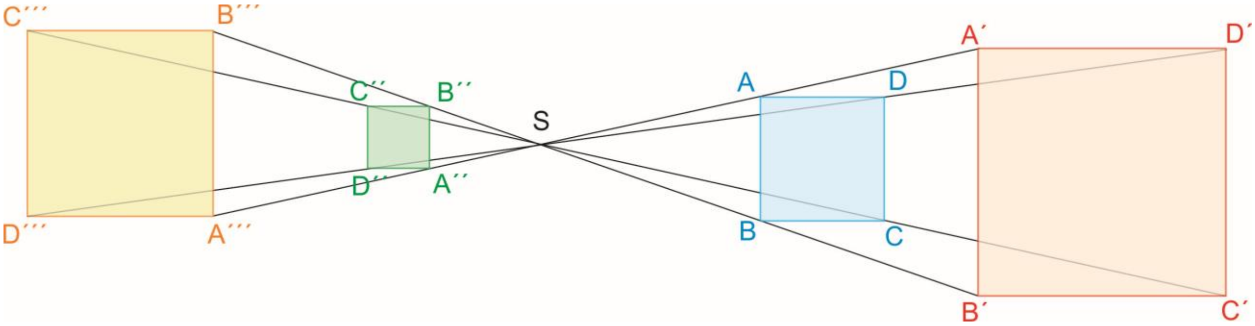
3) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ (3. Potenzgesetz)

Zentrische Streckung und Strahlensätze

Eine Abbildung heißt zentrische Streckung, wenn jedem Punkt A ein Bildpunkt A' so zugeordnet wird, das gilt:

(1) A' liegt auf einer Geraden durch Punkt S und Punkt A .
(2) $\left|\overline{SA'}\right| = k \cdot \left|\overline{SA}\right|$ (wobei $\left|\overline{SA}\right|$ die Länge der Strecke $\overline{SA}$ beschreibt).
Dabei heißt S Streckzentrum, k Streckfaktor.

Beispiele:



ABCD wird durch zentrische Streckung mit dem Faktor $k = 2$ auf $A'B'C'D'$ abgebildet.

ABCD wird durch zentrische Streckung mit dem Faktor $k = -0{,}5$ auf $A''B''C''D''$ abgebildet.

ABCD wird durch zentrische Streckung mit dem Faktor $k = -1{,}5$ auf $A'''B'''C'''D'''$ abgebildet.

Bemerkung:

Für $|k| > 1$ ist die Abbildung eine Vergrößerung

Für $|k| < 1$ ist die Abbildung eine Verkleinerung

Für $k = 1$ ist die Abbildung eine identische Abbildung

Für $k = -1$ ist die Abbildung eine Punktspiegelung

Flächeninhalte bei der zentrischen Streckung:

Wird eine Figur mit dem Flächeninhalt F durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k abgebildet, so gilt für den Flächeninhalt F' des Bildvielecks: $F' = k^2 \cdot F$

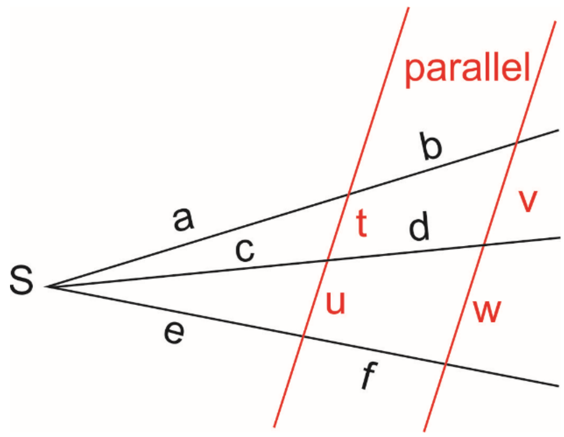
Beispiel: In der Abbildung oben hat das Quadrat A`B`C`D` einen viermal größeren Flächeninhalt als das Quadrat ABCD, da gilt: $k^2 = 2^2 = 4$.

Strahlensätze:

1. Strahlensatz: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$; $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{e+f}$

2. Strahlensatz: $\frac{a}{a+b}=\frac{t}{u}$; $\frac{c}{c+d}=\frac{t}{u}$; $\frac{e}{e+f}=\frac{u}{w}$

3. Strahlensatz: $\frac{t}{u}=\frac{v}{w}$; $\frac{t}{t+u}=\frac{v}{v+w}$

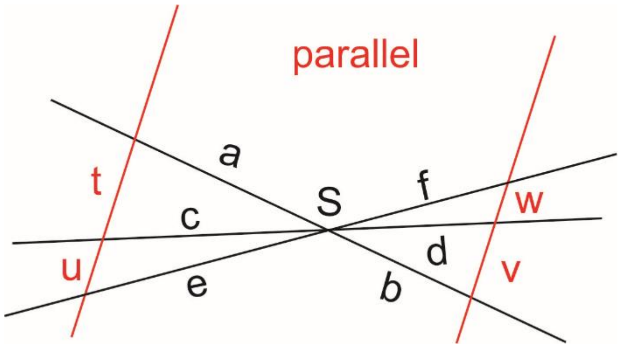


Schnittpunkt S zwischen den Parallelen:

1. Strahlensatz: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$; $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{e+f}$

2. Strahlensatz: $\frac{a}{b}=\frac{t}{v}$; $\frac{c}{d}=\frac{t}{v}$; $\frac{e}{f}=\frac{u}{w}$

3. Strahlensatz: $\frac{t}{u}=\frac{v}{w}$; $\frac{t}{t+u}=\frac{v}{v+w}$



Beispiele:

$\frac{a}{1{,}5}=\frac{6}{3}\Leftrightarrow a=\frac{6\cdot 1{,}5}{3}\Leftrightarrow \boxed{a=3}$

$\frac{b+4}{4}=\frac{2}{1}\Leftrightarrow b+4=8\Leftrightarrow \boxed{b=4}$

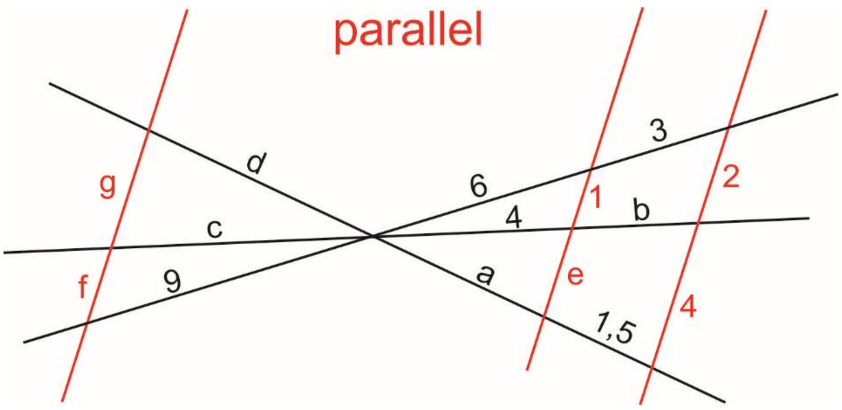
$\frac{c}{4}=\frac{9}{6}\Leftrightarrow c=\frac{9\cdot 4}{6}\Leftrightarrow \boxed{c=6}$

$\frac{d}{a}=\frac{9}{6}\Leftrightarrow d=\frac{9\cdot 3}{6}\Leftrightarrow \boxed{d=4{,}5}$

$\frac{e}{1}=\frac{4}{2}\Leftrightarrow \boxed{e=2}$

$\frac{f}{1}=\frac{9}{6}\Leftrightarrow \boxed{f=1{,}5}$

$\frac{g}{1{,}5}=\frac{4}{2}\Leftrightarrow \boxed{g=3}$

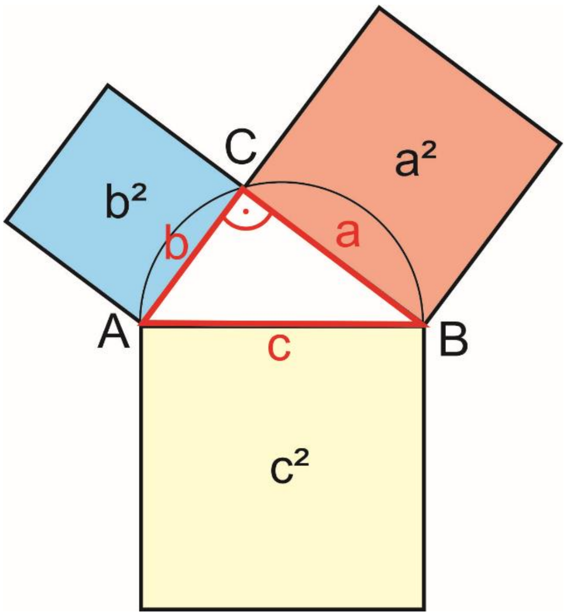


Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Satz des Pythagoras

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate:

$c^2 = a^2 + b^2$

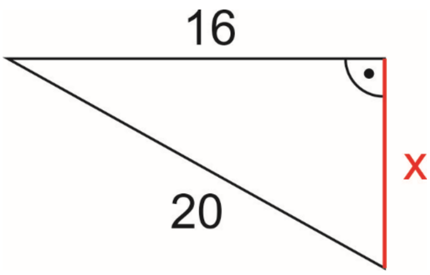


Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck gegenüber dem rechten Winkel heißt <u>Hypotenuse</u> (hier c)

Die beiden anderen Seiten im rechtwinkligen Dreieck heißen <u>Katheten</u> (hier a und b)

<u>Beispiele:</u>

1)



$x^2 + 16^2 = 20^2$

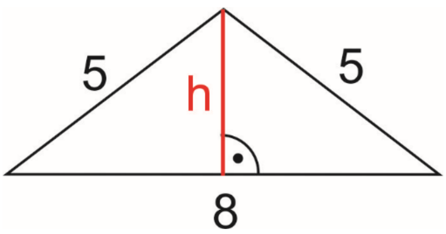
$\Leftrightarrow x^2 = 20^2 - 16^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 400 - 256$

$\Leftrightarrow x^2 = 144 \quad |\sqrt{\ }$

$\Rightarrow \boxed{x = 12}$

2)



$h^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow h^2 + 4^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow h^2 = 5^2 - 4^2$

$\Leftrightarrow h^2 = 25 - 16$

$\Leftrightarrow h^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$

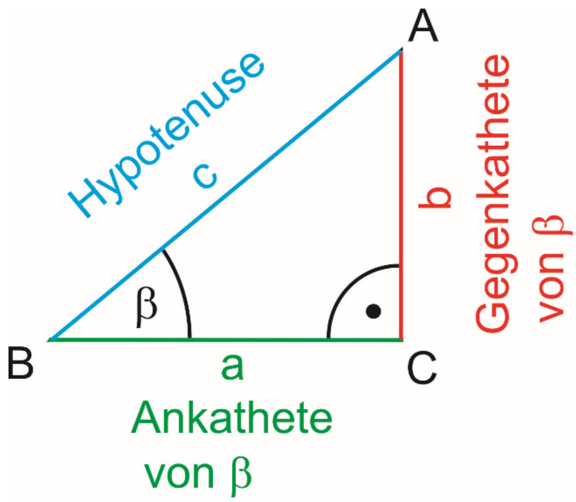
$\Rightarrow \boxed{h = 3}$

Sinus, Kosinus und Tangens

Sinus: $\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete von }\beta}{\text{Hypotenuse}}$

Kosinus: $\cos\beta = \frac{\text{Ankathete von }\beta}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete von }\beta}{\text{Ankathete von }\beta}$

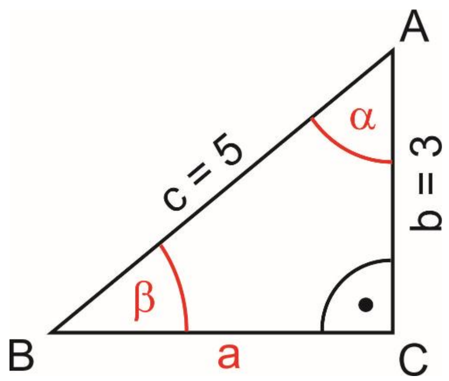


Ankathete von β : Kathete, die an dem Winkel β liegt.

Gegenkathete von β : Kathete, die an gegenüber dem Winkel β liegt.

Beispiel:

Berechnung von a (über Satz des. Pythagoras):



$a^2 + 3^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow a^2 = 5^2 - 3^2$

$\Leftrightarrow a^2 = 25 - 9$

$\Leftrightarrow a^2 = 16$

$\Rightarrow \boxed{a = 4}$

Berechnung von β (über Sinus):

$\sin\beta = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \boxed{\beta \approx 36{,}87°}$

Berechnung von α (über Kosinus):

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

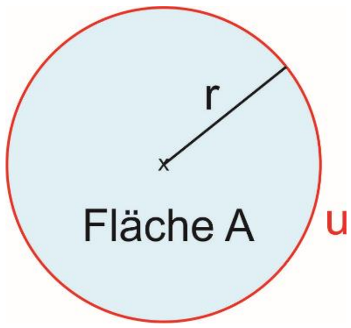
$\Rightarrow \boxed{\alpha \approx 53{,}13°}$

(oder über Winkelsumme):

$\alpha = 180° - 90° - 36{,}87°$

Kreise und Kreisteile

Kreis:



Flächeninhalt eines Kreises:

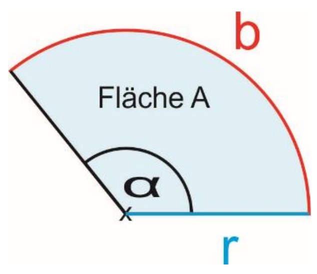
$$A = \pi \cdot r^2$$

Umfang eines Kreises:

$$u = 2\pi \cdot r$$

Dabei ist der r Radius des Kreises und $\pi \approx 3{,}14$ die Kreiszahl.

Kreisteil:



Für den Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel α gilt:

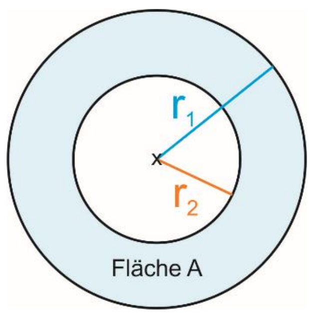
Länge des Kreisbogens:

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

Flächeninhalt des Kreisausschnitts:

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 \text{ oder } A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

<u>Beispiele:</u>



1) Kreisring mit $r_1 = 10cm$; $r_2 = 5cm$

Flächeninhalt: $A = A_{\bigcirc} - A_{\circ} = \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$

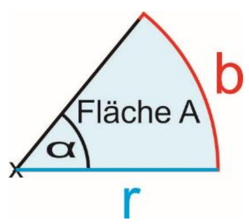
$$A = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 \approx 235{,}62 \Rightarrow \text{ca. } 236cm^2$$

2) Kreisausschnitt mit $r = 10cm$; $\alpha = 45^\circ$

Kreisbogen: $b = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 10 \approx 7{,}85 \Rightarrow \text{ca. } 7{,}85cm$

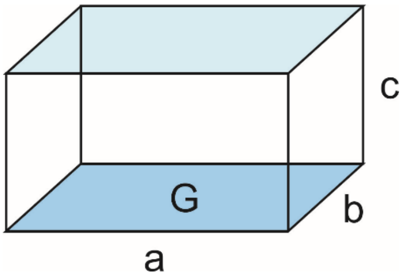
Flächeninhalt: $A = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 39{,}27 \Rightarrow \text{ca. } 39{,}3cm^2$

oder $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r \approx \frac{1}{2} \cdot 7{,}85 \cdot 10 = 39{,}3 \Rightarrow \text{ca. } 39{,}3cm^2$



Körper

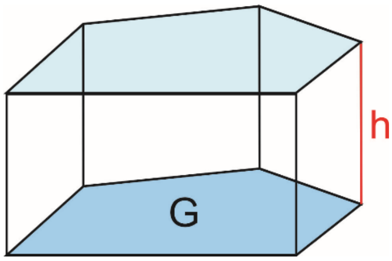
Quader:



Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

Oberfläche: $O = 2ab + 2ac + 2bc$

Prisma:



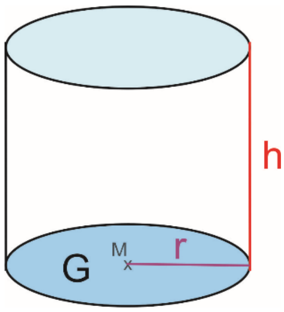
Volumen: $V = G \cdot h$

Oberfläche: $O = 2G + M$

wobei G die Grundfläche ist (im Bild Fünfeck)

wobei M die Mantelfläche ist (im Bild fünf Rechtecke)

Zylinder:

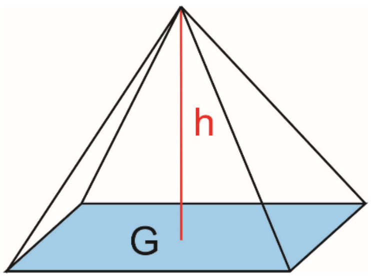


Volumen: $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Oberfläche: $O = 2G + M$

wobei $G = \pi \cdot r^2$ und $M = 2\pi \cdot r \cdot h$

Pyramide:

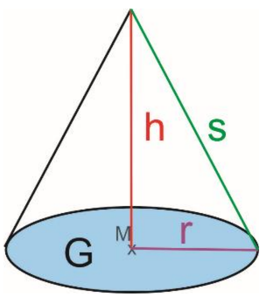


Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Oberfläche: $O = G + M$

wobei M die Mantelfläche ist (im Bild vier Dreiecke)

Kegel:

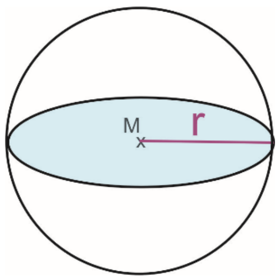


Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Oberfläche: $O = G + M$

wobei $G = \pi \cdot r^2$ und $M = \pi \cdot r \cdot s$

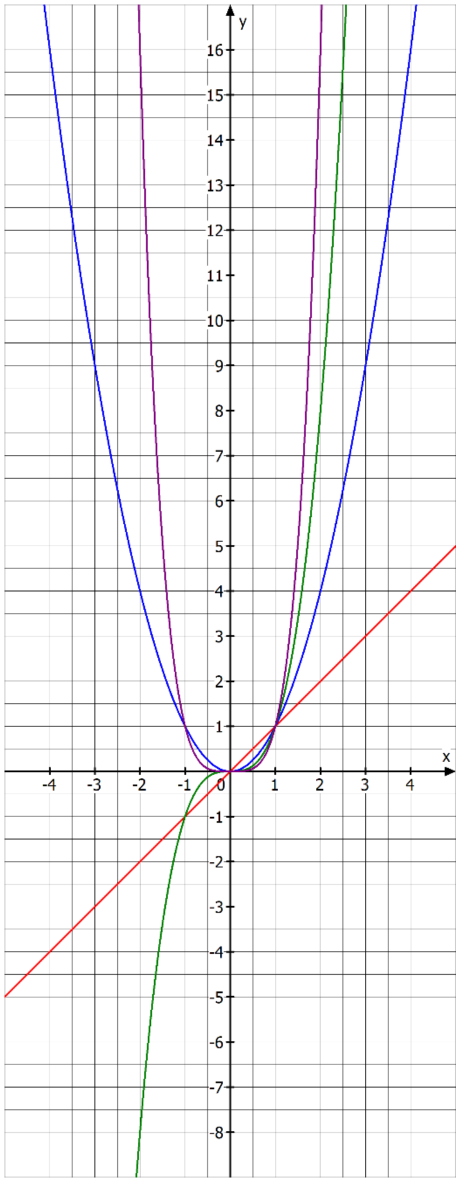
Kugel:



Volumen: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Oberfläche: $O = 4\pi \cdot r^2$

Potenzfunktion



1. Potenzfunktion mit natürlichen Hochzahlen

Die Funktion $f(x) = x^n$ mit $n = 1; 2; 3; ...$

heißt <u>Potenzfunktion</u>. Das Schaubild der Potenzfunktion heißt Parabel n-ter Ordnung.

In der Abbildung rechts sind folgende Potenzfunktionen dargestellt:

$f(x) = x^1 = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^4$

Das Schaubild von Potenzfunktionen mit geraden Hochzahlen ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Das Schaubild von Potenzfunktionen mit ungeraden Hochzahlen ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

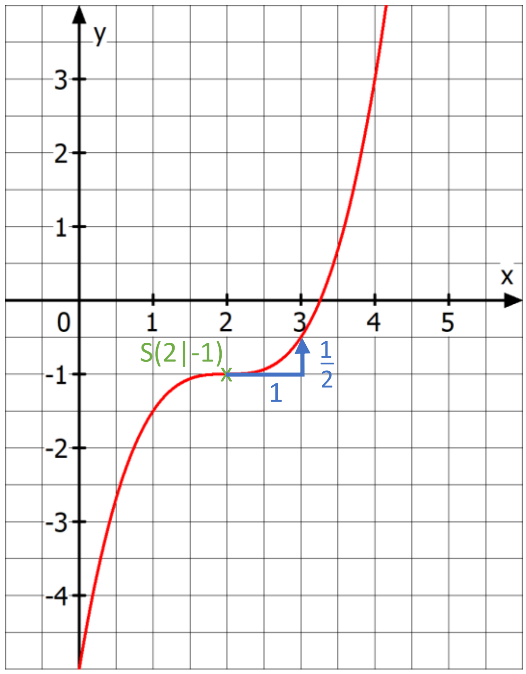
<u>Verschieben und Strecken von Potenzfunktionen:</u>

<u>Beispiel:</u>

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$$

$a = \frac{1}{2}$ Streckfaktor

$S(2 \mid -1)$ „Symmetriepunkt“



2. Potenzfunktion mit negativen ganzzahligen Hochzahlen

Das Schaubild der Funktion

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

heißt Hyperbel 1. Ordnung.

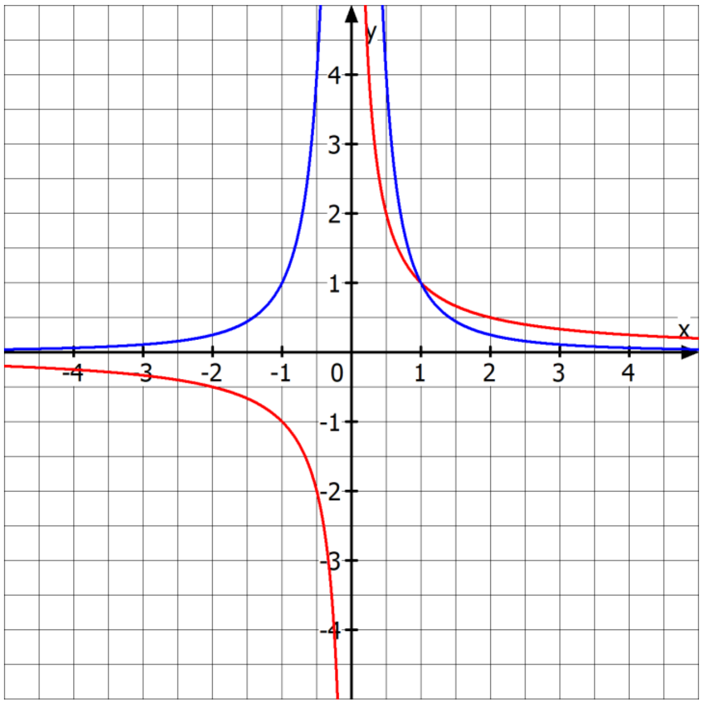
Das Schaubild dieser Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Das Schaubild der Funktion

$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

heißt Hyperbel 2. Ordnung.

Das Schaubild dieser Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.



Exponentialfunktion

1. Exponentialfunktion

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.

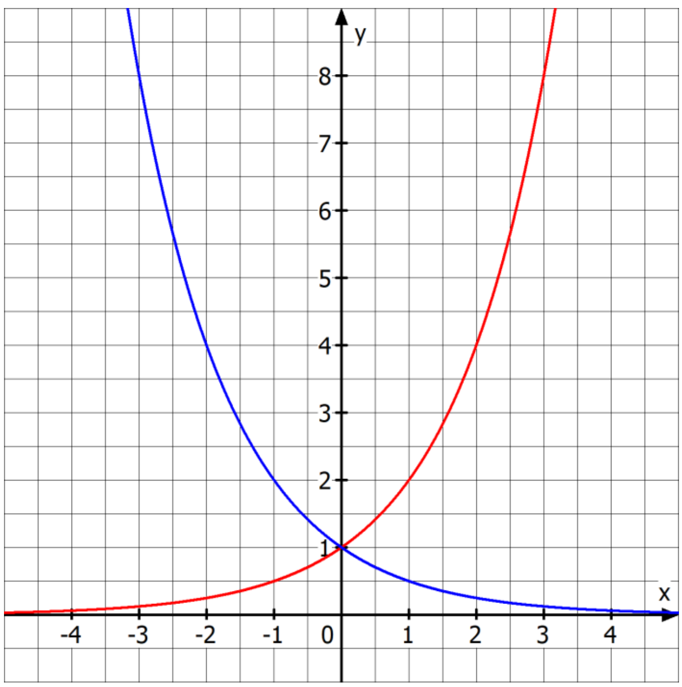
Beispiele:

1) $f(x) = 2^x$ 2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Für $a > 1$ steigt das Schaubild und

Für $0 < a < 1$ fällt das Schaubild.

Alle Schaubilder haben den Punkt P(0|1) gemeinsam. (da $a^0 = 1$)



2. Exponentialgleichung und Logarithmus

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable in der Hochzahl steht.

Beispiele:

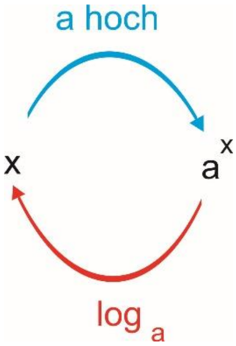
1) $2^x = 8$ 2) $2^x = 9$ 3) $10^x = 25$

Exponentialgleichungen können mit Hilfe des Logarithmus gelöst werden:

zu 1) $x = \log_2 8 = 3$ (da $2^3 = 8$)

zu 2) $x = \log_2 9 \approx 3{,}17$ (da $2^{3{,}17} \approx 9$)

zu 3) $x = \log_{10} 25 = \log 25 \approx 1{,}34$ (da $10^{1{,}34} \approx 25$)



$\log_2 8$: Lese: „Logarithmus zur Basis 2 von 8“

Logarithmieren ist die Umkehrung vom Potenzieren.