Übungsblatt 1 – Funktionsuntersuchungen – Aufgaben <u>ohne</u> GTR
Seite 1

1) Berechne die Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion f.
a) $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$   b) $f(x) = (3x+2)^2$   c) $f(x) = x^3 + 2x - x^2$

2) Berechne die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ mit Hilfe der h-Methode.

3) An welchen Stellen hat der Graph der Funktion f die Steigung m?
a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$, m = 1   b) $f(x) = \cos(x)$; $0 \le x \le 2\pi$, $m = -1$

4) Ordne jedem Funktionsgraphen den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion zu.

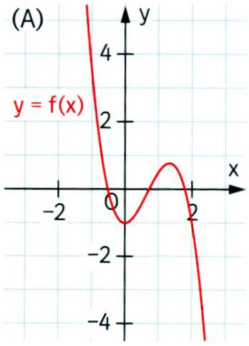


Fig. 2

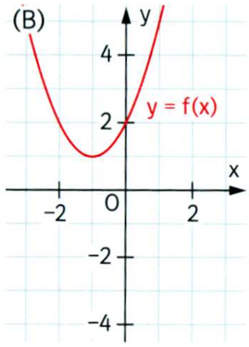


Fig. 3

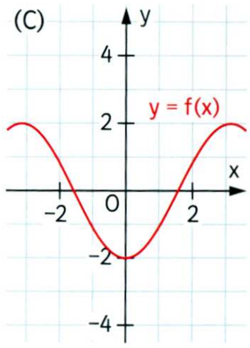


Fig. 4

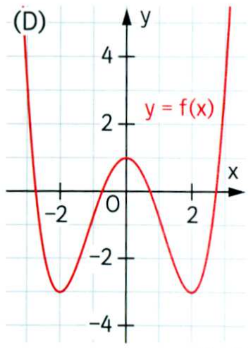


Fig. 5

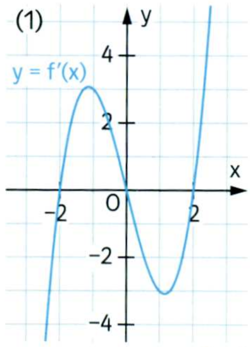


Fig. 6

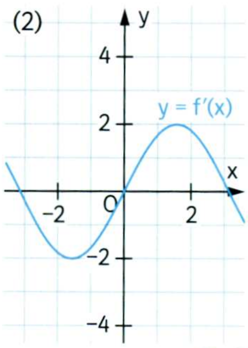


Fig. 7

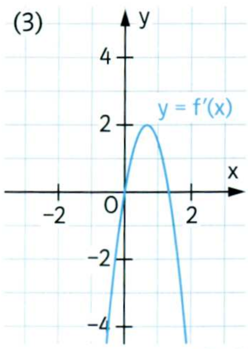


Fig. 8

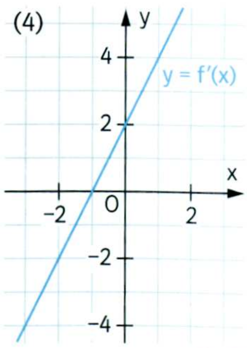
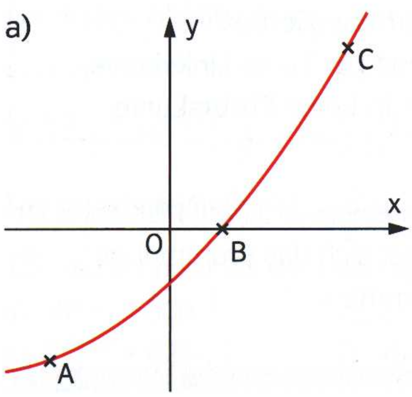
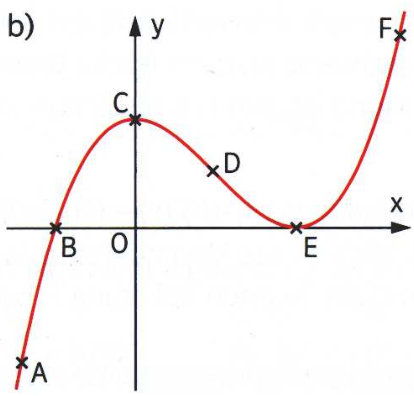


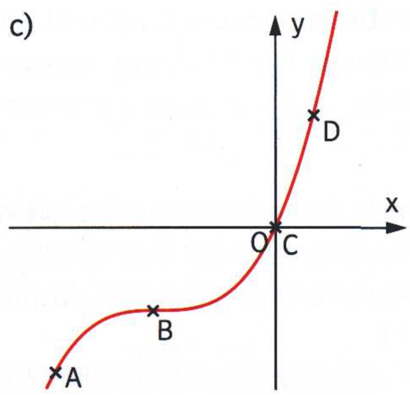
Fig. 9

5) Gebe einen Term für eine Funktion f an, für den beide Bedingungen gelten:
(1) Der Graph von f hat überall eine positive Steigung.
(2) Die Ableitung von f wird an genau einer Stelle 0.

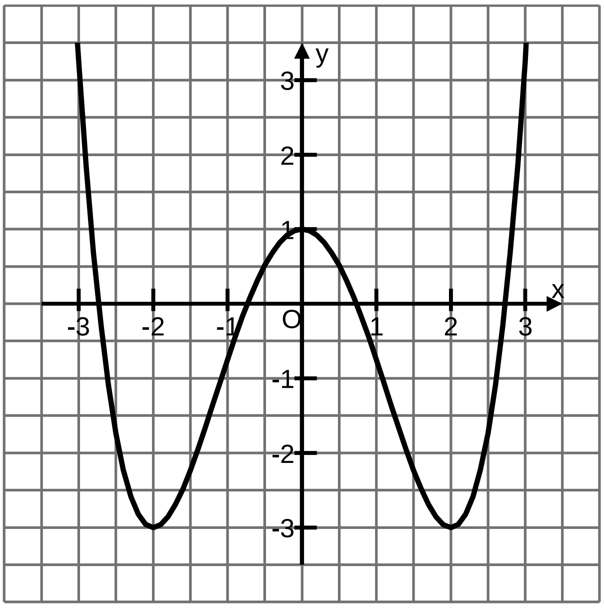
6) Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Notiere, ob $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in den markierten Punkten positiv, negativ oder null ist.



7) Gegeben ist das Schaubild der Funktion f. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründe deine Entscheidung.




a) $f'$ hat genau drei Nullstellen.

b) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [-2;0]$.

c) $f(-x) = f(x)$.

d) $f''$ hat genau eine Nullstelle.

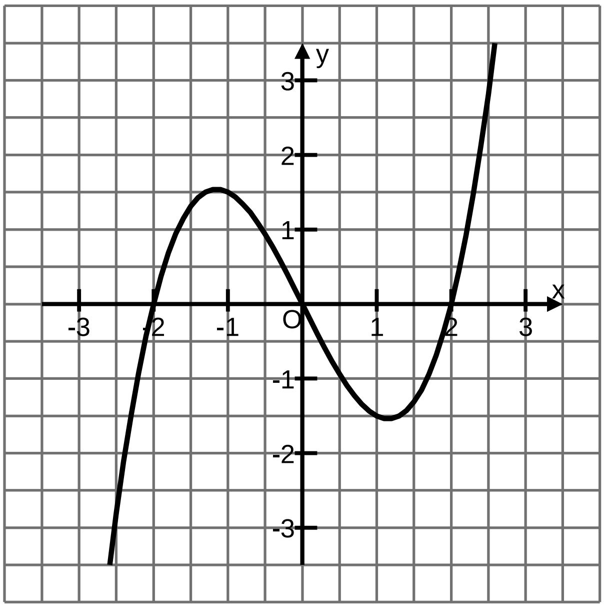
e) $f'(2) = 0$.

8) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$.

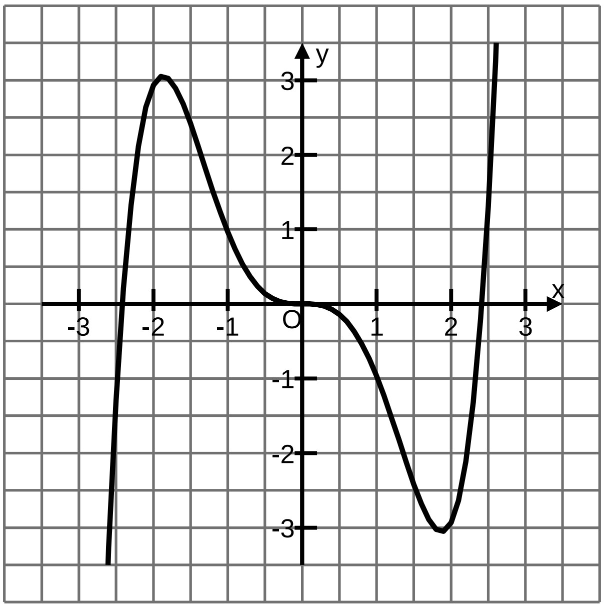
a) Bestimme $f'(4)$.
b) Bestimme die Stellen, in welchen der Graph von f die Steigung m = 3 hat.
c) Gebe alle x an, für die der Graph von f eine positive Steigung hat.

9) Dargestellt ist das Schaubild der Funktion f. Zeichne jeweils das Schaubild der Ableitungsfunktion $f'$ in das Koordinatensystem ein.

a)




b)




10) Bestimme im Wendepunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$ die Gleichung der Tangenten und der Normalen.

Übungsblatt 1 – Funktionsuntersuchungen – Aufgaben <u>ohne</u> GTR

Lösungen: Seite 1

1) a) $f(x)=4x^2+2x+1;\quad f'(x)=8x+2;\quad f''(x)=8;\quad f'''(x)=0$

Extrempunkte: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\qquad f''\left(-\frac{1}{4}\right)=8>0 \Rightarrow \boxed{T\left(-\frac{1}{4}/\frac{3}{4}\right)}$

Wendepunkte: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 8=0$ Widerspruch $\Rightarrow$ kein Wendepunkt.

b) $f(x)=9x^2+12x+4;\quad f'(x)=18x+12;\quad f''(x)=18;\quad f'''(x)=0$

Extrempunkte: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 18x+12=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}\qquad f''\left(-\frac{2}{3}\right)=18>0 \Rightarrow \boxed{T\left(-\frac{2}{3}/0\right)}$

Wendepunkte: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 18=0$ Widerspruch $\Rightarrow$ kein Wendepunkt.

c) $f(x)=x^3-x^2+2x;\quad f'(x)=3x^2-2x+2;\quad f''(x)=6x-2;\quad f'''(x)=6$

Extrempunkte: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=0$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{6}{9}} \Rightarrow \text{k.L} \Rightarrow \text{keine Extrempunkte}$$

Wendepunkte: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ ;\ f'''\left(\frac{1}{3}\right)=6\neq 0 \Rightarrow \boxed{W\left(\frac{1}{3}/\frac{16}{27}\right)}$

2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+h)^2-\frac{1}{2}x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+xh+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(x+\frac{1}{2}h)}{h}=\boxed{x}$$

3) a) $f'(x)=3x^2-2\ ;\ f'(x)=1 \Leftrightarrow 3x^2-2=1 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x_{1/2}=\pm 1}$

b) $f'(x)=-\sin(x)\ ;\ f'(x)=-1 \Leftrightarrow -\sin(x)=-1 \Leftrightarrow \sin(x)=1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{mit Schaubild von } y=\sin(x) \text{ und } y=1} \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

4) $A\leftrightarrow 3\ ;\ B\leftrightarrow 4\ ;\ C\leftrightarrow 2\ ;\ D\leftrightarrow 1$

5) $\boxed{f(x)=x^3}$

6)

| a) | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| A | Negativ | Positiv | Positiv |
| B | Null | Positiv | Positiv |
| C | Positiv | Positiv | Positiv |

| b) | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| A | Negativ | Positiv | Negativ |
| B | Null | Positiv | Negativ |
| C | Positiv | Null | Negativ |
| D | Positiv | Negativ | Null |
| E | Null | Null | Positiv |
| F | Positiv | Positiv | Positiv |

| c) | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| A | Negativ | Positiv | Negativ |
| B | Negativ | Null | Null |
| C | Null | Positiv | Positiv |
| D | Positiv | Positiv | Positiv |

Lösungen: 

7) a) Richtig, da f drei Extremstellen besitzt. Info: Funktion: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+1$

b) Richtig, da f für $x\in[-2;0]$ monoton steigend ist.

c) Richtig, da f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

d) Falsch, da f zwei Wendepunkte (bei $x_{1/2}\approx\pm1$) besitzt.

e) Richtig, da f bei x = 2 einen Tiefpunkt hat.

8) $f'(x)=x^2-6x+8$

a) $f'(4)=4^2-6\cdot4+8=0$

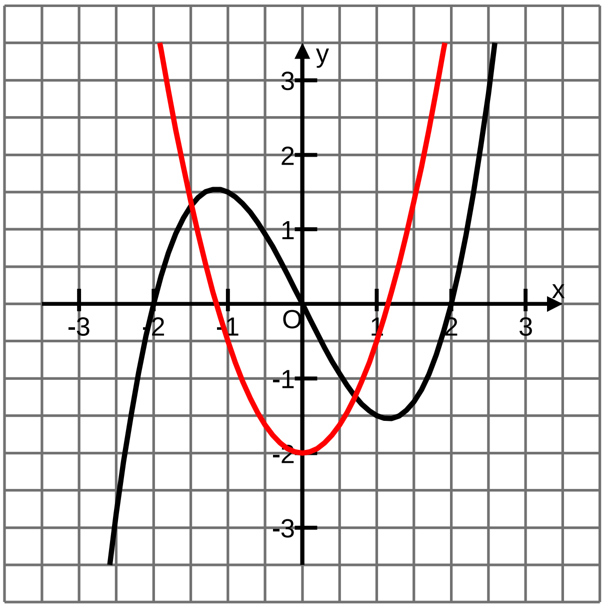
b) $f'(x)=3\Leftrightarrow x^2-6x+8=3\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x_{1/2}=3\pm\sqrt{9-5}\Rightarrow x_1=5;\ x_2=-1$

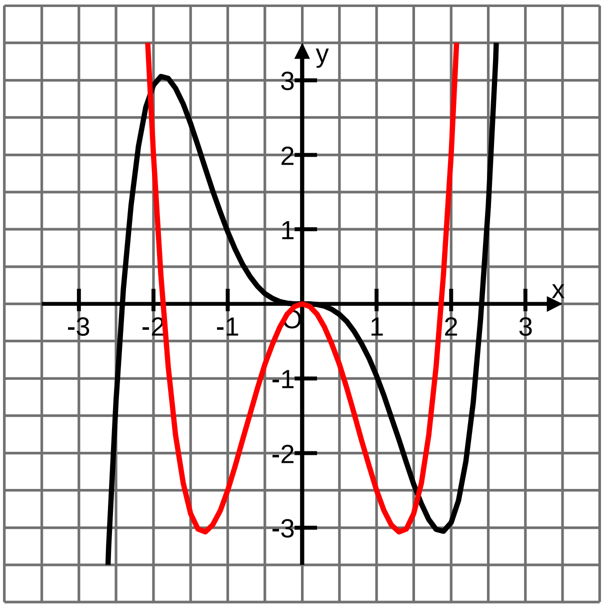
c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_{1/2}=3\pm\sqrt{9-8}\Rightarrow x_1=4;\ x_2=2$

$f'(3)=-1<0\ \Rightarrow f(x)<0$ für 2 < x < 3 und f(x) > 0 für x < 2 oder x > 4.

9)

a) Info: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x$ Info: $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{7}{6}x^3$




10) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+5x;\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+5;\quad f''(x)=3x-6;\quad f'''(x)=3$

Wendepunkt: $f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-6=0\Leftrightarrow x=2\ \ f'''(2)=3\neq0\Rightarrow \boxed{W(2/2)}$

Steigung im Wendepunkt: $m_t=f'(2)=\frac{3}{2}\cdot4-6\cdot2+5=-1$

Tangente im Wendepunkt: $t: y=-1x+c$; W einsetzen: $2=-1\cdot2+c\Leftrightarrow c=4\ \Rightarrow \boxed{t: y=-1x+4}$

Normale im Wendepunkt: $n: y=1x+c$; W einsetzen: $2=1\cdot2+c\Leftrightarrow c=0\ \Rightarrow \boxed{n: y=1x}$