

Übungsblatt 2 – Funktionsuntersuchungen – Aufgaben mit GTR

- 1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 6,4x^3 + 2x^2 + x$.
 - a) Bestimme die Nullstellen von f .
 - b) Bestimme die Extremstellen von f .
 - c) Bestimme die Wendestellen von f .
 - d) In welchem Punkt hat das Schaubild der Funktion f die Steigung 100?
- 2) Bestimme die Gleichung der Tangente im Wendepunkt des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$.
- 3) Eine oben offene Kiste mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass bei einem Volumen von 40l die Oberfläche möglichst klein wird. Wie sind die Maße der Kiste zu wählen?

- 4) Nomaden bauen mithilfe von vier Stäben der Länge 2,40m ein pyramidenförmiges Zelt mit quadratischem Grundriss auf. Wie entsteht ein Zelt mit größtmöglichem Rauminhalt?



- 5) Der Innenbogen einer großen Brücke kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{15000}(x^4 - 80x^3 + 2900x^2 - 52000x)$, wobei $f(x) \geq 0$ ist, beschrieben werden. Der Boden liegt entlang der Geraden $y = 0$.
 - a) Berechne die Spannweite und Höhe des Bogens.
 - b) Unter welchem Winkel verlaufen die Stützpfeiler zum Boden?

- 6) Eine Handyfirma plant die Preissenkung eines ihrer Handys. Momentan werden monatlich 10.000 Stück zu einem Preis von 100€ verkauft. Marktuntersuchungen ergaben, dass bei einer Preissenkung um je 5€ pro Handy voraussichtlich jeweils 1000 Handys mehr pro Monat verkauft werden könnten.
 - a) Um wie viel Euro sollte die Handyfirma den Handypreis senken, damit der Gewinn maximal ist?
 - b) Um wie viel Euro sind die Einnahmen größer als vor der Preissenkung?



Übungsblatt 2 – Funktionsuntersuchungen – Aufgaben mit GTR

Lösungen:

- 1) a) $f(x) = 0$: $N_1(0|0)$; $N_2(6,72|0)$ b) Maximum: $H(5,01|230,00)$
c) Extremstellen von $f'(x)$:
Minimum von $f'(x)$ bei $T'(-0,10|0,80) \Rightarrow$ Wendepunkt von $f(x)$ bei $W(-0,10|0,09)$
Maximum von $f'(x)$ bei $H'(3,30|79,54) \Rightarrow$ Wendepunkt von $f(x)$ bei $W(3,30|136,48)$
d) $f'(x) = 100 \Rightarrow$ Schnittpunkt $S'(-1,99|100)$
 $\Rightarrow$ Im Punkt $S(-1,99|-60,19)$ von $f(x)$ hat f die Steigung 100.
- 2) Minimum von $f'(x)$: $T'(1,50|-1,125) \Rightarrow$ Wendepunkt von $f(x)$ bei $W(1,50|0,875)$
Tangente: $t: y = -1,125x + c$.
Setze W in Tangentengleichung ein: $t: 0,875 = -1,125 \cdot 1,50 + c \Leftrightarrow c = 2,5625$
 $\Rightarrow$ Tangente: $t: y = -1,125x + 2,5625$.
- 3) (1) Größe die extremal werden soll: $O = a^2 + 4 \cdot a \cdot b$
(2) Nebenbedingung: $V = a^2 \cdot b = 40 \Rightarrow b = \frac{40}{a^2}$
(3) Zielfunktion: $O(a) = a^2 + 4a \cdot \frac{40}{a^2} = a^2 + \frac{160}{a}$
(4) Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte:
Minimum von $O(a)$: $T(4,31|55,70)$
 $\Rightarrow$ Maße der Kiste: $a = 4,31\text{dm} = \boxed{43,1\text{cm}}$
 $b = \frac{40}{a^2} = 2,15\text{dm} = \boxed{21,5\text{cm}}$
- 4) (1) Größe die extremal werden soll: $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$
(2) Nebenbedingung: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 = 2,4^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{2,4^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
(3) Zielfunktion: $V(a) = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \sqrt{2,4^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
(4) Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte:
Maximum von $V(a)$: $H(3,92|7,09)$
 $\Rightarrow$ Die Nomaden müssen die Stäbe in einem Quadrat mit der Seitenlänge 3,92m aufstellen, damit der Rauminhalt des Zeltens möglichst groß ist.
- 5) a) Nullstellen: $f(x) = 0$ $N_1(0|0)$; $N_2(40|0) \Rightarrow$ Spannweite (Abstand der Nullstellen): 40m
Höhe: Hochpunkt $H(20|24) \Rightarrow$ Brückenhöhe 24m
b) Mit GTR: $f'(0) = 3,47$; $f'(40) = -3,47$
Die Steigung der Stützpfeiler am Boden ist 3,47 (bzw. -3,47)
Winkel zum Boden: $m = \tan(\alpha) \Leftrightarrow 3,47 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 73,92^\circ$
 $\Rightarrow$ Der Winkel der Stützpfeiler zum Boden beträgt $73,92^\circ$.
- 6) a) Momentane Einnahmen: $E(x) = 10.000 \cdot 100\text{€} = 1.000.000\text{€}$
 $E(x) = (10.000 + 1.000 \cdot x) \cdot (100\text{€} - 5\text{€} \cdot x)$; Maximum von $E(x)$: $(5|1.125.000)$
 $\Rightarrow$ Bei einer Preissenkung um $5 \cdot 5\text{€} = 25\text{€}$ sind die monatlichen Einnahmen mit 1.125.000€ am größten.
b) Mehreinnahmen: 125.000€