

Übungsblatt 3 – Funktionsuntersuchungen – Aufgaben ohne GTR

1) Berechne die Extremstellen und Wendestellen der Funktion f (bei c nur die Wendestellen).

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$

c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

2) In Abb. 1 ist das Schaubild einer Funktion f dargestellt.

Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.
Begründe Deine Entscheidung.

a) Für $1 < x < 3$ ist $f'(x) < 0$.

b) Für $x = 2$ ist $f''(x) > 0$.

c) Für $x = -1$ ist $f'(x) = 0$.

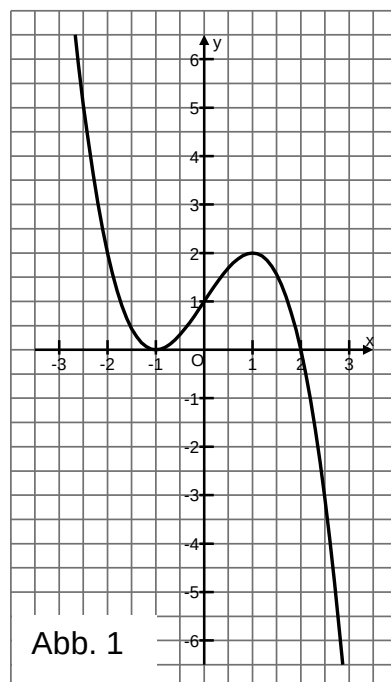
d) Für $x = -1$ ist $f''(x) > 0$.

e) Für $x = 0$ ist $f''(x) = 0$.

f) f' hat an der Stelle $x = 1$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.

g) An der Stelle $x = -0,5$ ist $f'(x) < 0$.

h) An der Stelle $x = -2$ ist $f''(x) > 0$.



3) In Abb. 2 ist das Schaubild einer Ableitungsfunktion f' dargestellt.

Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.
Begründe Deine Entscheidung.

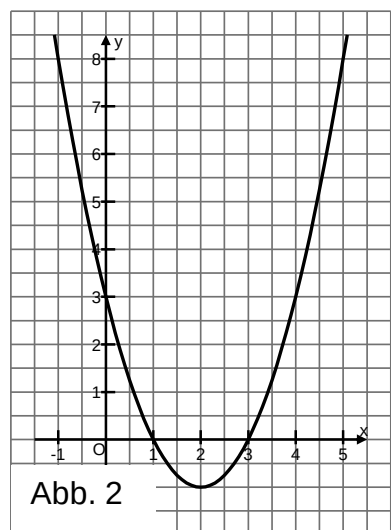
a) Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ ein Minimum.

b) Für $x > 3$ ist f streng monoton steigend.

c) An der Stelle $x = 3$ hat f ein lokales Minimum.

d) Die Funktion f hat eine Wendestelle bei $x = 2$.

e) Die Funktion f hat mindestens eine Nullstelle.

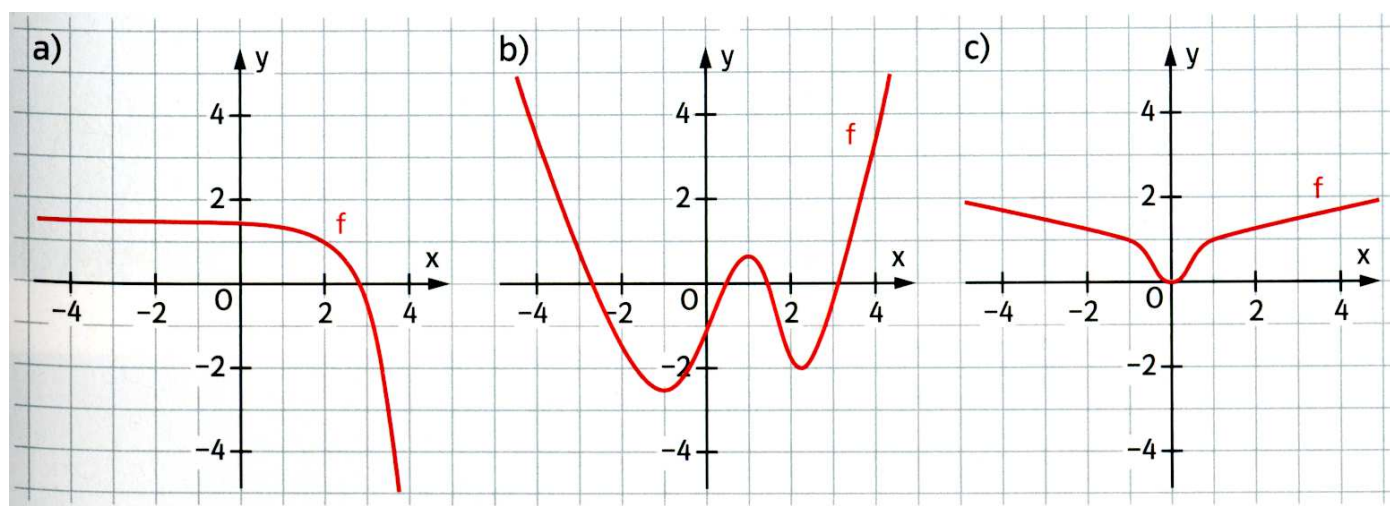


4) Bestimme die Tangente an den Graphen von f in $P_0(x_0 | f(x_0))$.

a) $f(x) = x^4$ und $x_0 = 0,5$

b) $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{x^2}$ und $x_0 = 1$

5) Skizziere das Schaubild von f' in das Koordinatensystem.



- 1) a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 6x - 8$ $f'''(x) = 6$
 Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = 1$
 $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$
 $f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 1$
 Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$
 $f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x = \frac{4}{3}$
- b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 24x$ $f'''(x) = 24x - 24$
 Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (4x - 12) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$
 $f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Extremstelle bei $x_1 = 0$
 $f''(3) = -19 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 3$
 Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (12x - 24) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$
 $f'''(0) = -24 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x_1 = 0$ (Sattelpunkt)
 $f'''(2) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x_1 = 2$
- c) $f(x) = x^2 - x^{-1}$ $f'(x) = 2x + x^{-2}$ $f''(x) = 2 - 2x^{-3}$ $f'''(x) = 6x^{-4}$
 Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^{-3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
 $f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x = 1$
- 2) a) Richtig, da f für $1 < x < 3$ streng monoton fallend ist.
 b) Falsch, da f bei $x = 2$ eine Rechtskurve und keine Linkskurve macht.
 c) Richtig, da f bei $x = -1$ einen Tiefpunkt hat.
 d) Richtig, da f bei $x = -1$ eine Linkskurve macht.
 e) Richtig, da f bei $x = 0$ einen Wendepunkt hat.
 f) Richtig, da f bei $x = 1$ einen Hochpunkt hat.
 g) Falsch, da f bei $x = -0,5$ streng monoton steigend ist.
 h) Richtig, da f bei $x = -2$ eine Linkskurve macht.
- 3) a) Falsch, da f an der Stelle $x = 2$ die Steigung -1 hat.
 b) Richtig, da $f'(x) > 0$ für $x > 3$.
 c) Richtig, da $f'(3) = 0$ und da f' bei $x = 3$ einen VZW von $-$ nach $+$ hat.
 d) Richtig, da f' bei $x = 2$ die Steigung 0 hat.
 e) Richtig, da f' den Grad 2 hat und somit f den Grad 3 . Funktionen 3 . Grades haben mindestens eine Nullstelle.

4) a) $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$ $m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$t: y = mx + c = \frac{1}{2}x + c$ $P\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{16}\right)$ einsetzen: $t: \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = -\frac{3}{16}$

$t: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^{-2}$ $f'(x) = 6x^2 + 6x^{-3}$ $m = f'(1) = 12$

$t: y = mx + c = 12x + c$ $P(1 \mid -1)$ einsetzen: $t: -1 = 12 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -13$

$t: y = 12x - 13$

5)

