Lösungen der Musteraufgaben 2017

Baden-Württemberg

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Lösung Pflichtteil (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabe 1:
Die Funktion wird mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet:

Es ist $u(x) = 2x^2 + 5$ und $v(x) = e^{-2x}$. Dann folgt $u'(x) = 4x$ und $v'(x) = -2e^{-2x}$.

$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2 + 5) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$

Ausklammern der e-Funktion ergibt zusammengefasst:
$f'(x) = e^{-2x} \cdot (4x - 2 \cdot (2x^2 + 5)) = e^{-2x} \cdot (4x - 4x^2 - 10)$

Aufgabe 2:

Eine Stammfunktion lautet $F(x) = 4 \cdot (-\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot \cos(2x)$

Aufgabe 3:

$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x \qquad \Rightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \qquad \Rightarrow 2e^{2x} = 4 \qquad \Rightarrow e^{2x} = 2 \qquad \Rightarrow 2x = \ln(2)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$

Aufgabe 4:
Die Eigenschaften haben folgende Bedeutung:

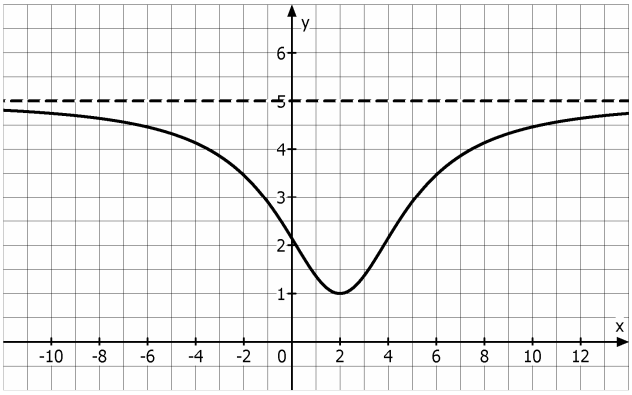
(1) $f(2) = 1$: Der Punkt P(2/1) liegt auf dem Schaubild von f(x).

(2) $f'(2) = 0$: Das Schaubild von f besitzt an der Stelle x = 2 (also im Punkt P) eine waagrechte Tangente.
Das heißt, dass der Punkt P ein Hochpunkt oder Tiefpunkt oder Sattelpunkt Ist.

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$: Bei x = 4 besitzt das Schaubild von f(x) eine Wendestelle.

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$:
Das Schaubild von f(x) besitzt die waagrechte Asymptote y = 5.

Ein möglicher Verlauf des Graphen wäre dieser:



Natürlich gibt es noch viele weitere Graphen, die genauso richtig sind.

Aufgabe 5:

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

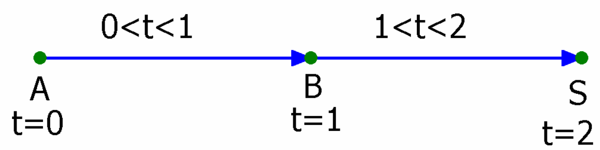
Gleichung der Ebene E.
Da die Gerade g orthogonal zu E verläuft, ist der Normalenvektor von E der Richtungsvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes C(4/3/-8): $4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = 22$ und damit ist d = 22
Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$

Schnittpunkt S von g und E:
$(1+t) - 2(-1-2t) - 3(3-3t) = 22 \quad \Rightarrow 1 + t + 2 + 4t - 9 + 9t = 22 \quad \Rightarrow 14t - 6 = 22$
$\Rightarrow t = 2$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S(3/-5/-3).

Kontrolle, ob der Punkt S zwischen A und B liegt:
Die Parameterform von g ist so aufgebaut: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$
Da der Schnittpunkt S für t = 2 erreicht wird, gilt $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$



Damit der Punkt S zwischen A und B liegt, müsste der Parameter t zwischen 0 und 1 liegen.
Da t = 2 ist, liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

Aufgabe 6:

Der Normalenvektor von E_1 lautet $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E_2 ist parallel zur Ebene E_1, wenn $\vec{n_1}$ auch ein Normalenvektor von E_2 ist.
Dies ist dann der Fall, wenn der Vektor $\vec{n_1}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene E_2 ist.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - 6 + 4 = 0$

Damit ist die Orthogonalität gezeigt. Somit sind die beiden Ebenen parallel.

Da die Ebene E_3 parallel zu den beiden anderen Ebenen sein soll, kann für diese Ebene auch der Normalenvektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Um die Gleichung von E_3 aufzustellen, wird noch ein Punkt dieser Ebene bestimmt werden.

Ein (beliebiger) Punkt von E_1 lautet A(0/0/-1).
Ein (beliebiger) Punkt von E_2 lautet B(7/7/5).

Der Mittelpunkt M der Strecke AB liegt auf der Ebene E_3.

Berechnung von M: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, also M(3,5/3,5/2)

Eine Gleichung von E_3 lautet $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe 7:

Es handelt sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen:
$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Erklärung: Die Spielkarten müssen nur unterschieden werden in Asse und „Nicht-Asse“)
Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“)
Zur Veranschaulichung könnte man auch ein Baumdiagramm heranziehen.

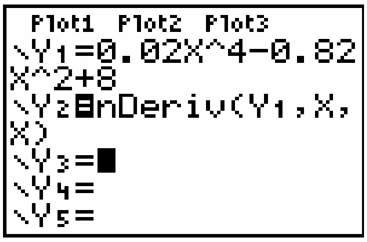
$P(B) = P(\text{erst Dame dann Ass}) + P(\text{erst Ass dann Dame}) \quad = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$

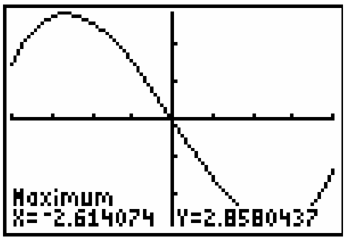
Lösung Wahlteil Analysis Aufgabe A

Aufgabe 1:

a) Die Wände sind am steilsten in den Wendepunkten des Schaubildes von f(x) (bzw. an den Extrempunkten der Ableitungsfunktion $f'(x)$)

Lösung mit dem GTR:





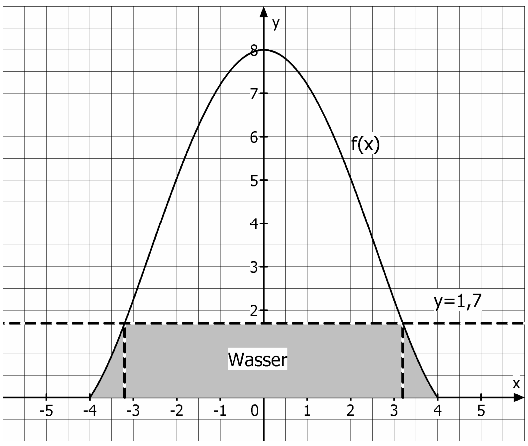
Die Ableitungsfunktion (rechtes GTR-Bild) besitzt ein Maximum bei $x \approx -2{,}614$ und ein Minimum bei $x \approx 2{,}614$.
Die Wände des Stollens sind etwa 2,6 m rechts und links von der Stollenmitte am steilsten.

Der Winkel, den die Wände an dieser Stelle mit der Horizontalen einschließen entspricht dem Winkel der Tangenten an diesen Stellen mit der Horizonalen (x-Achse).
Dieser Winkel wird auch Steigungswinkel genannt.

Die Steigung der Tangente bei $x \approx -2{,}614$ beträgt $f'(-2{,}614) \approx 2{,}858$ (siehe Y-Wert beim GTR-Schaubild oben rechts)
Der Steigungswinkel α einer Geraden wird mit der Formel $m = \tan\alpha$ berechnet.
Aus $2{,}858 = \tan\alpha$ folgt $\alpha = 70{,}7°$.

Da das Schaubild von f(x) symmetrisch zur y-Achse ist, beträgt der Winkel an den steilsten Stellen des Stollens auf beiden Seiten jeweils 70,7°.

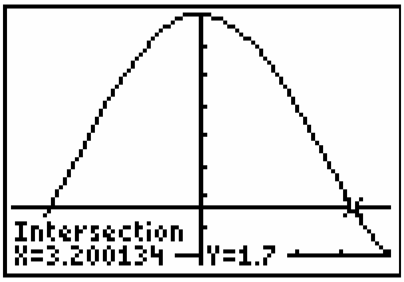
b) Für die Ermittlung des Wasservolumens wird zunächst eine Skizze erstellt:



Das Volumen des „Wassers in dem 50 m langen Stollen wird ermittlet mit der Formel $V = G \cdot 50\text{m}$ (G ist die Grundfläche des grau gefärbten Querschnitts)

Zur Berechnung der Grundfläche müssen zunächst die Schnittstellen des Schaubildes von f(x) mit der Geraden y = 1,7 bestimmt werden.

Lösung mit dem GTR:



Die Schnittstellen betragen $x \approx \pm 3,2$.

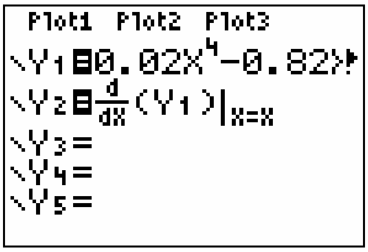
Grundfläche G = $2 \cdot \int_{-4}^{-3,2} f(x)dx + A_{Rechteck} = 2 \cdot 0,617 + 6,4 \cdot 1,7 = 12,114$ m²

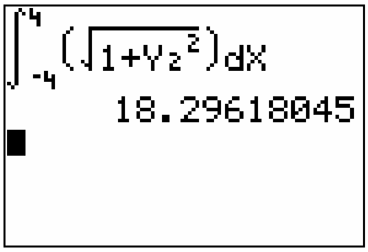
(Das Integral wurde mit dem GTR berechnet)

$V_{Wasser} = 12,114 \cdot 50 = 605,7 m^3$

Im Stollen befinden sich ca. 606 m³ Wasser.

c) Länge des Kurvenstücks: $s = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \approx 18,3$ Meter (GTR)





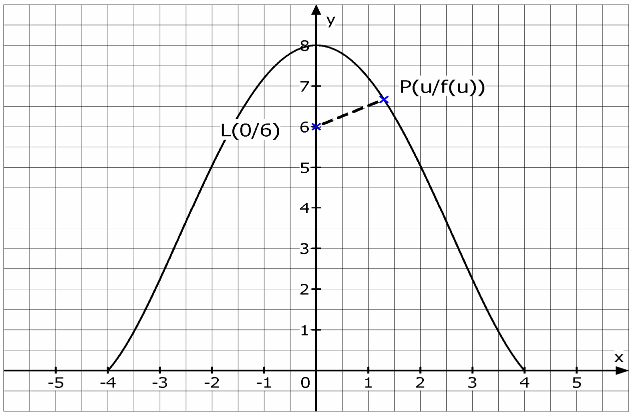
Flächeninhalt der Wandfläche des Stollens:
Betrachtet man das gebogene Kurvenstück des Stollens als Gerade, kann die Wandfläche mit Hilfe der Flächeninhaltsformel eines Rechtecks bestimmt werden:
$A_{Wandfläche} = 18,3m \cdot 50m = 915$ m²

Die Bodenfläche ist ebenfalls rechteckig. $A_{Boden} = 8m \cdot 50m = 400m^2$

Prozentualer Unterschied: $\frac{915}{400} = 2,2875$.
Die Wandfläche ist um 128,75% größer als die Bodenfläche.

d) Damit die Lampe von den Wänden einen mögilchst großen Abstand besitzt, muss die Lampe symmetrisch zu den Wänden aufgehängt werden.
Das heißt der Lampenpunkt besitzt die Koordinaten L(0/6).

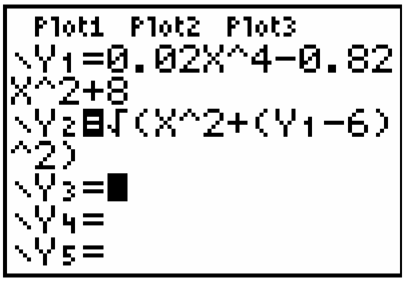
Gesucht ist nun der minimale Abstand zwischen Schaubild von f(x) und dem Punkt L.

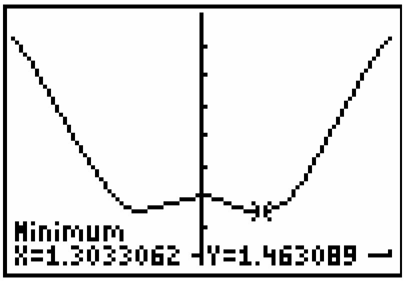


Ein allgemeiner Punkt des Schaubildes von f(x) besitzt die Koordinaten P(u/f(u)).

Der allgemeine Abstand zwischen L und P beträgt
$d(u) = \sqrt{(x_P - x_L)^2 + (y_P - y_L)^2} = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-6)^2}$

Das Minimum von d(u) entspricht dem minimalen Abstand von L zum Stollen.

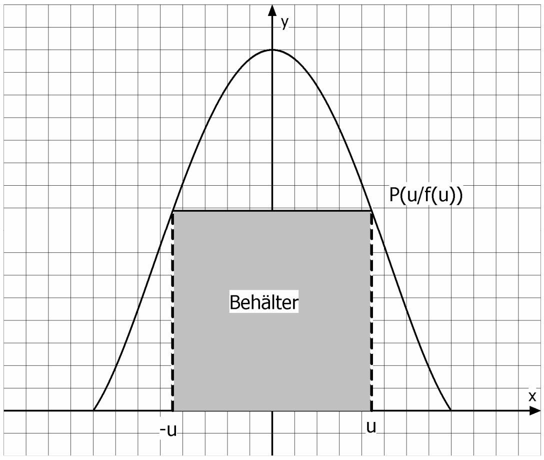




Das Schaubild von d(u) wird minimal für $u \approx 1{,}3$ mit $d(1{,}3) \approx 1{,}46$ m.

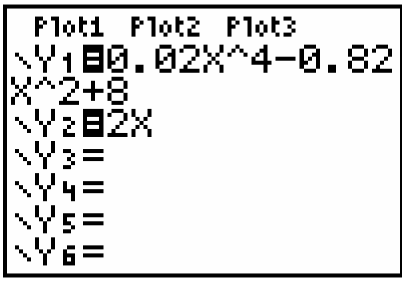
Der minimale Abstand beträgt 1,46 m und damit wird der Mindestabstand von 1,4 m eingehalten.

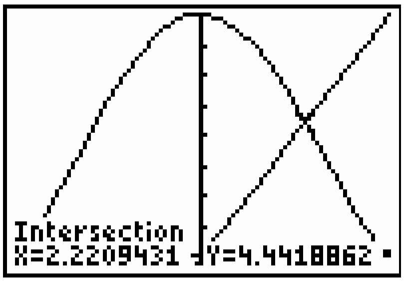
e) Da der Behälter würfelförmig ist, muss in dem betrachteten Querschnitt zwischen dem Schaubild von f(x) und der x-Achse ein Quadrat einbeschrieben werden.
Die Seitenlängen dieses Quadrats entsprechen den maximalen Kantenlängen des würfelförmigen Behälters.



Die Seitenlängen des Quadrats betragen $u-(-u)=2u$ und $f(u)-0=f(u)$.
Damit dies tatsächlich ein Quadrat ergibt, muss $2u=f(u)$ gelten.

Lösung mit dem GTR:





Die Lösung lautet $u\approx 2,22$.
Damit ist die Seitenlänge des Quadrats $2\cdot 2,22=4,44$ m lang.
Der Behälter darf höchstens 4,44 m breit sein.

Aufgabe 2:

a) $f_t(0)=e \Rightarrow (-1)\cdot(1-\frac{1}{t})=e \Rightarrow -1+\frac{1}{t}=e \Rightarrow \frac{1}{t}=e+1 \Rightarrow t=\frac{1}{e+1}$

b) Berechnung der Nullstellen von $f_t(x)$:

$f_t(x)=0$: $(x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{t}\cdot e^x\right)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I) $x-1=0 \Rightarrow x=1$

Gleichung II) $1-\frac{1}{t}\cdot e^x=0 \quad \Rightarrow e^x=t \quad \Rightarrow x_2=\ln(t)$ für $t>0$

Satz vom Nullprodukt: $x_1=1$ (unabhängig von t).

Es kann der Sonderfall eintreten, dass x_2 denselben Wert wie x_1 annimmt:
$x_2=x_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(t)=1 \quad \Rightarrow t=e$

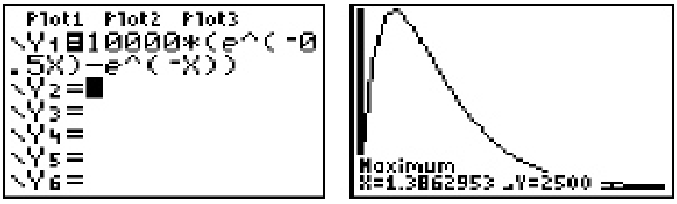
Ergebnis: Für alle $t>0$ und $t\neq e$ besitzt $f_t(x)$ mehr als eine Nullstelle.

Lösung Wahlteil Analysis Aufgabe B

Aufgabe 1

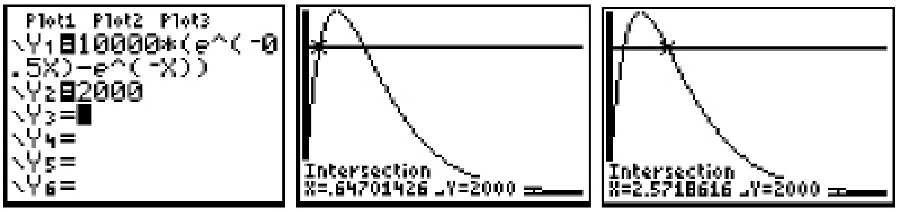
a) Die maximale momentane Zuflussrate entspricht dem y-Wert des Hochpunktes von r(t).
Notwendige und hinreichende Bedingung: $r'(t) = 0$ und $r''(t) < 0$

Lösung mit dem GTR:



Die Zuflussrate wird t = 1,386 Stunden nach Regenbeginn maximal.
Die maximale Zuflussrate beträgt r(1,386) = 2500 Liter pro Stunde.

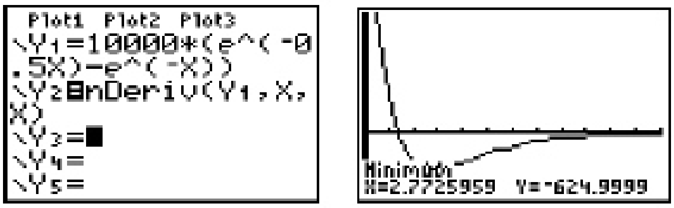
Die momentane Zuflussrate nimmt Werte größer als 2000 Liter pro Stunde an , wenn gilt:
$r(t) \geq 2000$
Die Lösung der Ungleichung erfolgt mit dem GTR:



Die momentane Zuflussrate ist im Intervall $0{,}647 \leq t \leq 2{,}572$ (also von etwa 0,6 Stunden bis etwa 2,6 Stunden nach Regenbeginn) größer als 2000 Liter pro Stunde.

b) Die stärkste Abnahme der momentanen Zuflussrate ist zu dem Zeitpunkt, an dem die Ableitungsfunktion $r'(t)$ den kleinsten (negativen) Funktionswert annimmt.

Lösung mit dem GTR:



Die momentane Zuflussrate nimmt etwa 2,8 Stunden nach Regenbeginn am stärksten ab.

Das Maximum der Zuflussrate existiert am Rand bei t = 0.

Mittlere Zuflussrate: $\frac{1}{4-0} \cdot \int_0^4 r(t)dt \approx 1869{,}1$ Liter pro Stunde

c) Berechnung der Wassermenge nach 3 Stunden:

Da die Funktion r(t) die momentane Zuflussrate beschreibt, ergibt sich die Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt über die Berechnung eines Integrals:

$$\int_0^3 r(t)dt = 6035{,}3 \quad \text{(GTR)}$$

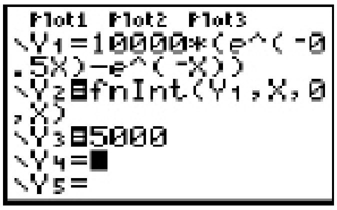
In den ersten drei Stunden nach Regenbeginn sind etwa 6035 Liter Wasser in den Tank geflossen. Da der Tank zu Beginn leer war, entspricht das folglich auch der Menge, die sich nach 3 Stunden im Tank befindet.

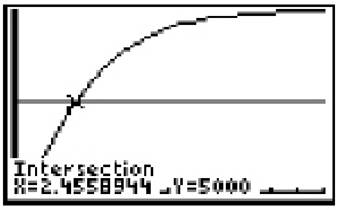
Der Zeitpunkt, zu dem sich 5000 Liter im Tank befinden, seit t = u.

Ansatz: $\int_0^u r(t)dt = 5000$

Gesucht ist die obere Grenze u des Integrals, so dass sich im Ergebnis 5000 ergibt.

Auch dies kann mit dem GTR gelöst werden.
In den Funktionseditor muss eine Integralfunktion eingegeben werden mit unterer Grenze 0 und oberer Grenze x.



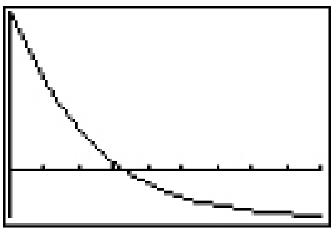


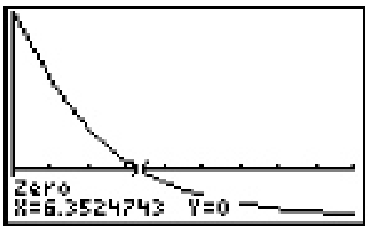
Als Lösung mit dem GTR ergibt sich u = 2,456.
Nach etwa 2,5 Stunden befinden sich 5000 Liter Wasser im Tank.

d) Für die Lösung dieser Aufgabe muss die neue Funktion w(t) interpretiert werden.
Der Term r(t) gibt an, dass der Zufluss genau so wie bisher erfolgt.
Der Term -400 gibt an, dass pro Stunde eine konstante Menge von 400 Liter entnommen wird.

In den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn werden $9 \cdot 400 = 3600$ Liter Wasser entnommen (in den ersten 3 Stunden nach Regenbeginn wird noch kein Wasser entnommen !)

Skizze des Schaubildes von w(t) (ab $t \geq 3$)





Interpretation:
Wenn sich das Schaubild von w(t) oberhalb der t-Achse befindet, ist die momentane Zuflussrate positiv, das heißt, dass die Wassermenge im Tank zunimmt.
Es ist w(t) = 0 für t = 6,352 Stunden. Zu diesem Zeitpunkt ist die Wassermenge im Tank maximal. Für t > 6,352 nimmt die Wassermenge im Tank ab, da sich das Schaubild von w(t) unterhalb der t-Achse befindet und die Zuflussrate negativ ist.

Berechnung der maximalen Wassermenge:

$$\int_3^{6,352} w(t)dt = 1806,3 \text{ Liter (GTR)}$$

Vom Zeitpunkt t = 3 bis t = 6,352 fließen 1806,3 Liter in den Tank.
Da zum Zeitpunkt t = 3 bereits 6035,3 Liter im Tank gewesen sind (siehe Aufgabe b)) beträgt die maximale Wassermenge nach 6,352 Stunden 1806,3 + 6035,3 = 7841,6 Liter.

Aufgabe 2

a) Tangentengleichung bei x = 1: $y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$
Es gilt $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ und $f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi \cdot x)$
$f(1) = 0$ und $f'(1) = -\pi$

Tangentengleichung $y = -\pi \cdot (x-1) + 0 \Rightarrow y = -\pi \cdot x + \pi$
Schnittpunkt $S(0 / \pi)$

b) Berechnung der Fläche:

$$A = \int_0^1 \sin(\pi \cdot x)dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi \cdot x)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) + \frac{1}{\pi}\cos(0) = -\frac{1}{\pi}\cdot(-1) + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Ansatz für die Funktionsgleichung von g(x):
Da die Nullstellen x = 0 und x = 1 von g(x) bekannt sind, kann die Funktion durch $g(x) = a \cdot x \cdot (x-1)$ aufgestellt werden.

Der Parameter a muss nun so gewählt werden, dass sich die gleiche Fläche ergibt, die oben berechnet wurde:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 a \cdot x \cdot (x-1)dx = a \cdot \int_0^1 x \cdot (x-1)dx = a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \quad \text{(Integralberechnung mit dem GTR)}$$

Nun soll gelten: $a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{\pi}$ und damit $a = -\frac{6}{\pi} \approx -1,91$ und damit $g(x) = -1,91 \cdot x \cdot (x-1)$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit wäre, dass $a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{\pi}$ gilt, denn das Ergebnis des Integrals könnte ja auch negativ sein, wenn sich die Fläche unterhalb der x-Achse befindet.
In dem Fall wäre $a = \frac{6}{\pi} \approx 1,91$ und die Funktionsgleichung lautet $g(x) = 1,91 \cdot x \cdot (x-1)$.

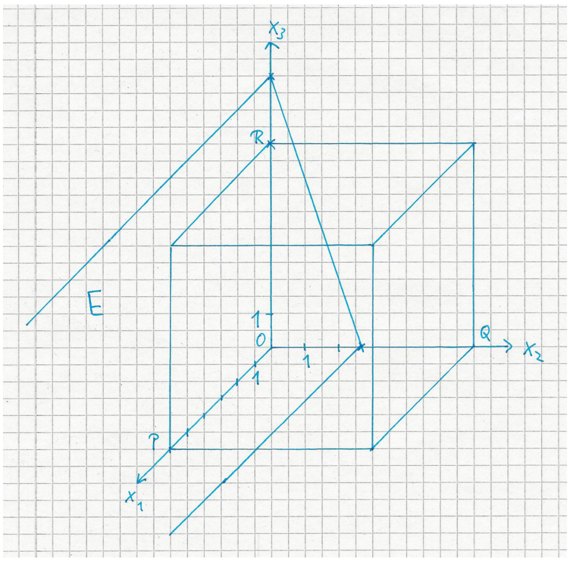
Lösung Wahlteil Analytische Geometrie A

a) Skizze des Würfels und der Ebene:

Für die Ebene werden die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) benötigt:
Da in der Koordinatengleichung die Variable x_1 nicht vorkommt, ist die Ebene E parallel zur x_1-Achse.

Schnittpunkt mit x_2-Achse: $S_{x_2}(0/x_2/0) \Rightarrow S_{x_2}(0/\frac{8}{3}/0)$

Schnittpunkt mit x_3-Achse: $S_{x_3}(0/0/x_3) \Rightarrow S_{x_3}(0/0/8)$



Die x_1-Achse ist parallel zu E.
Der Abstand von E zur x_1-Achse wird dadurch bestimmt, dass ein beliebiger Punkt A auf der x_1-Achse bestimmt wird und dann der Abstand von A zur Ebene E berechnet wird.

Als Punkt A wird der Ursprung A(0/0/0) festgelegt.

Hessesche Normalenform von E: $\frac{3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0$

Einsetzen von A in die HNF von E: $d(A,E) = \left|\frac{3 \cdot 0 + 0 - 8}{\sqrt{10}}\right| = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2{,}53$

Die Ebene E hat von der x_1-Achse den Abstand 2,53.

b) Abstand des Punktes S(6/6/6) von E_a:

HNF von E_a: $\frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0$

Einsetzen von S(6/6/6): $\left|\frac{3 \cdot 6 + 6 - a}{\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{24 - a}{\sqrt{10}}\right|$

Nun soll gelten: $\left|\frac{24-a}{\sqrt{10}}\right| = \sqrt{10}$

Um den Betrag aufzulösen, müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1: $\frac{24-a}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow 24-a=10 \quad \Rightarrow a=14$

Fall 2: $\frac{24-a}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \quad \Rightarrow 24-a=-10 \quad \Rightarrow a=34$

c) Alle Ebenen der Schar besitzen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus diesem Grund sind alle Ebenen der Schar zueinander parallel.

Gemeinsame Punkte mit dem Würfel:
Aus der Skizze in a) ergibt sich, dass es zwei Grenzlagen für die parallele Ebenenschar gibt, in der die Ebene mit dem Würfel jeweils eine nur eine Würfelkante gemeinsam haben.
Grenzlage 1:
Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von O(0/0/0) bis P(6/0/0) gemeinsam.
Einsetzen der Koordinaten von O (oder P) in die Ebenenschar: $3 \cdot 0 + 0 = a \quad \Rightarrow a = 0$

Grenzlage 2:
Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von T(0/6/6) bis S(6/6/6) gemeinsam.
Einsetzen der Koordinaten von T (oder S) in die Ebenenschar: $3 \cdot 6 + 6 = a \quad \Rightarrow a = 24$

Das heißt, dass für alle Werte von a mit $0 \le a \le 24$ die Ebene gemeinsame Punkte mit dem Würfel besitzt.

Lösung Wahlteil Analytische Geometrie B

a) Die Ebene S enthält die Punkte F(8/8/8), $M_1(8/0/4)$ und $M_2(4/0/8)$.

Parametergleichung der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix}$

Da auch jeder vielfache Vektor als Normalenvektor verwendet werden kann,

wird als Normalenvektor $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ genutzt.

Ansatz für die Koordinatengleichung von $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$.
Einsetzen des Punktes F(8/8/8) ergibt $2 \cdot 8 - 8 + 2 \cdot 8 = 24 = d$,

Koordinatengleichung von S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$

Winkelberechnung:

Die Decke des Raumes besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

Der Abstand des Segeltuches von der Ecke E entspricht dem Abstand der Ebene S vom Punkt E(8/0/8).
Dies wird mit der Hesseschen Normalenform der Ebene S berechnet:

HNF von S: $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0$ bzw. $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0$

Einsetzen von E(8/0/8) in die HNF: $d = \left| \dfrac{2 \cdot 8 - 0 + 2 \cdot 8 - 24}{3} \right| = \dfrac{8}{3}$

Das Segeltuch ist etwa 2,7 Meter von der Ecke E entfernt.

b) Das Dreieck M_1FM_2 ist gleichschenklig, wenn zwei der drei Seiten gleich lang sind.

Länge von M_1F: $\left|\overrightarrow{M_1F}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+8^2+4^2} = \sqrt{80}$

Länge von M_2F: $\left|\overrightarrow{M_2F}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+8^2+0^2} = \sqrt{80}$

Da $\overline{M_1F} = \overline{M_2F}$ ist, ist das Dreieck M_1FM_2 gleichschenklig.

Flächeninhalt des Segeltuches: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot h$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+0^2+4^2} = \sqrt{32}$$

$$h^2 = \sqrt{80}^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{32}\right)^2 = 80-8 = 72 \Rightarrow h = \sqrt{72}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{72} = 24$$

Die Fläche des Segeltuches beträgt 24 m².

b) Gleichung der Gerade durch A(8/0/0) und C(0/8/0) : g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$

Diese Gerade wird nun parallel um 6 nach oben verschoben.
Dies erreicht man damit, dass der Richtungsvektor gleich bleibt und beim Ortsvektor die x_3-Koordinate um 6 erhöht wird.

Parallele Gerade „auf der Höhe 6“ : h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$

Nun wird die Gerade h mit der Segeltuchebene geschnitten.
Der Schnittpunkt L ist der Punkt, in dem die Stange das Segeltuch berührt.

$$2(8-8t)-8t+2\cdot 6 = 24 \quad \Rightarrow 16-16t-8t+12 = 24 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Einsetzen von t in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt $L(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 6)$

Das untere Ende der Stange befindet sich somit imt Punkt $Z(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 0)$.

Lösung Wahlteil Stochastik A

a) X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,43.
$P(E_1) = P(X = 10) \approx 0{,}145$

X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,06 + 0,06 + 0,02 + 0,01 = 0,15
$P(E_2) = P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) \approx 0{,}067$

$P(E_3) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} = 0{,}00099$ (keine Binomialverteilung, da Reihenfolge vorgegeben)

$P(E_4) = 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{17} \cdot 18 = 0{,}00094$

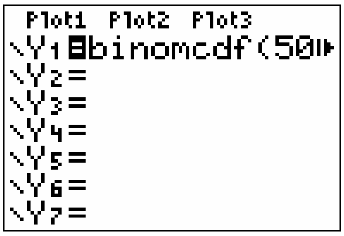
Der Faktor 18 kommt dadurch zustande, weil es 18 Möglichkeiten gibt, drei aufeinander folgende Personen auf 20 Plätzen unterzubringen (Platz 1 - 3, Platz 2 - 4,..., Platz 18 - 20)

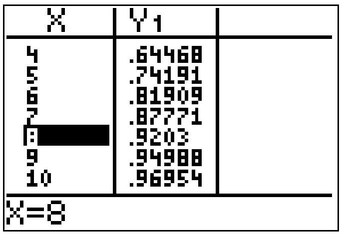
b) X = Anzahl der Personen mit Blutgruppe AB.
X ist binomialverteilt mit n = 500 und p = 0,05.

Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 25$

Nun soll gelten: $P(25 - c \le X \le 25 + c) \ge 0{,}9$

Es ist $P(25 - c \le X \le 25 + c) = P(X \le 25 + c) - P(X \le 25 - c - 1)$

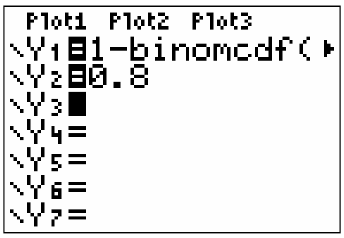


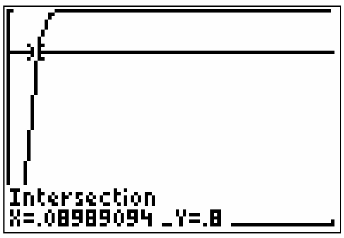


Die kleinstmögliche natürliche Zahl ist c = 8.

c) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0 und negativem Rhesusfaktor.
X ist binomialverteilt mit unbekanntem n = 150 und unbekanntem p.

Es soll gelten: $P(X > 10) \ge 0{,}8$
$\Rightarrow 1 - P(X \le 10) \ge 0{,}8$





Der Anteil der Universalspender müsste mindestens p = 0,0899 = 8,99 % betragen.

Lösung Wahlteil Stochastik B

a) P(Kleeblatt – Kleeblatt) = $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

Die Zufallsvariable X gibt an, wie häufig "Kleeblatt - Kleeblatt" gedreht wird.
X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,25.

$P(X=2)=0{,}282$

b) Das Spiel ist fair, wenn die erwartete Auszahlung genau so hoch wie der Einsatz ist.

Um die erwartete Auszahlung zu ermitteln, werden die Wahrscheinlichkeiten benötigt, mit denen die einzelnen Ergebnisse erzielt werden.

Die Zufallsvariable X gebe die Auszahlung an.

P(Stern – Stern) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(X=2)$

P(Diamant – Diamant) = $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}=P(X=0{,}85)$

P(Kleeblatt – Kleeblatt) = $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}=P(X=0{,}20)$

Der Erwartungswert von X beträgt $E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+0{,}85\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot 0{,}20=0{,}20$ €

Da die erwartete Auszahlung dem Spieleinsatz entspricht, ist das Spiel fair.

Damit der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 0,05 € Gewinn erzielt, muss der erwartete Auszahlungsbetrag von derzeit 0,20 € um 5 Cent auf 0,15 € reduziert werden.

Der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ sei a.

Nun gilt: $E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+a\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot 0{,}20=0{,}15$ €

$\Rightarrow \frac{19}{180}+\frac{1}{9}a=0{,}15 \quad \Rightarrow \frac{1}{9}a=\frac{2}{45} \quad \Rightarrow a=0{,}40$ €.

Die Auszahlung für „Diamant – Diamant“ muss künftig 0,40 € betragen.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Spiel etwas ausgezahlt wird, beträgt

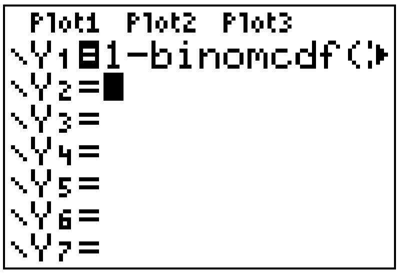
P(Stern- Stern) - P(Diamant - Diamant) - P(Kleeblatt - Kleeblatt) $=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{7}{18}$

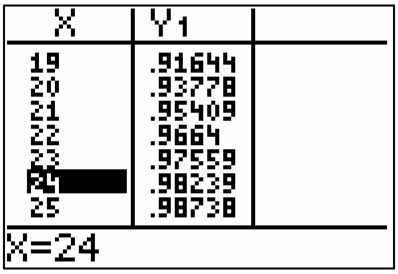
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Spiele, bei denen etwas ausgezahlt wird.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p=\frac{7}{18}$

Es soll gelten: $P(X\geq 5)>0{,}98$

$\Rightarrow 1-P(X\leq 4)>0{,}98$





Man muss das Spiel mindestens 24 mal spielen.

d) Die Nullhypothese lautet $H_0: p \geq \frac{1}{36}$

Die Alternativhypothese lautet folglich $H_1: p < \frac{1}{36}$

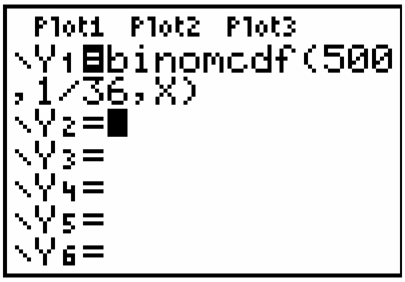
Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit n = 500 und $p = \frac{1}{36}$.

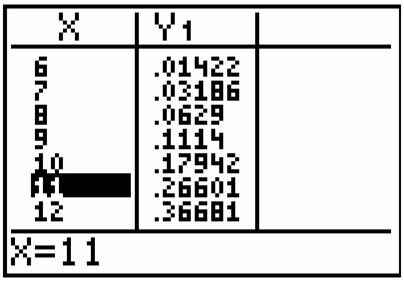
Der Annahmebereich für die Nullhypothese lautet $A = \{k+1,,...,n\}$

Der Ablehnungsbereich lautet $\overline{A} = \{0,...,k\}$.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft das Ereignis „Stern – Stern“ eintritt.

Aufgrund der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit soll gelten:
$P(X \in \overline{A}) \leq 0{,}05 \quad \Rightarrow P(X \leq k) \leq 0{,}05$





Aus der Tabelle liest man ab:
$P(X \leq 7) = 0{,}032$ und $P(X \leq 8) = 0{,}063$

Damit ist k = 7 und der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{0,...,7\}$
Wenn bei 500 Spielen höchstens siebenmal „Stern – Stern“ erscheint, wird die Nullhypothese abgelehnt; andernfalls wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.