<u>**Struktur eines Aufgabensatzes**</u> (seit 2017)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

20 VP

keine Auswahlmöglichkeit

Anteile der Sachgebiete:

- Analysis	9 - 11	VP
- Geometrie	7 - 8	VP
- Stochastik	2 - 3	VP

Pflichtteil

(20 VP)

Wahlteil Analysis

20 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen A 1 und A 2.

Analysis A 1	**Analysis A 2**
(20 VP)	(20 VP)

Wahlteil Geometrie

10 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen B 1 und B 2.

Geometrie B 1	**Geometrie B 2**
(10 VP)	(10 VP)

Wahlteil Stochastik

10 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen C 1 und C 2.

Stochastik C 1	**Stochastik C 2**
(10 VP)	(10 VP)

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Gleichungen

vgl. unten: „Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre“

Analysis

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:
  Potenzfunktionen
  ganzrationale Funktionen
  trigonometrische Funktionen
  natürliche Exponentialfunktion
- Wirkung von Parametern, insbesondere:
  Verschiebungen
  Streckungen in x- und y-Richtung
- Zusammengesetzte Funktionen:
  Summen, Differenzen
  einfache Produkte und Quotienten
  einfache Verkettungen
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften in einfachen Fällen
- Funktionenscharen, Ortslinien
- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
  Summen- und Faktorregel
  Potenzregel
  Produktregel
  Kettenregel
- Untersuchung von Funktionen und Graphen, insbesondere:
  Nullstellen
  elementare Symmetrie
  Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten
  Monotonie, Krümmungsverhalten
  Extrempunkte, Wendepunkte
- Stammfunktionen:
  Summenregel
  Faktorregel
  lineare Substitution
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen des Integrals:
  Berechnung von Flächeninhalten (auch unbegrenzter Flächen)
  rekonstruierter Bestand
  Mittelwert
  nicht: Volumen von Rotationskörpern
- nicht: Folgen, Iterationen
- nicht: Differenzialgleichungen, Wachstumsprozesse

Analytische Geometrie

- Vektor, Ortsvektor, Linearkombination
- Geraden
- Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform)
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt
- Betrag eines Vektors
- Abstands- und Winkelberechnungen
  nicht: Abstand windschiefer Geraden
- zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:
  Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
- nicht: Beweise mit Hilfe von Vektoren

Stochastik

- Baumdiagramme, Pfadregeln
- Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Erwartungswert
- Binomialverteilung, Formel von Bernoulli
- Testen von Hypothesen (nur einseitig)
  nicht: Fehler 2. Art
- nicht: stetige Verteilung

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- nicht: Faktorisierung in schwierigen Fällen
  (Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“, Polynomdivision)
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z.B. bei Gleichungen mit Parametern)

1. Lineare Gleichungen

- auch: Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungen mit Parameter

Beispiel

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a: $ax = x + 3$

2. Quadratische Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten
- Untersuchung der Lösbarkeit quadratischer Gleichungen mit Parameter

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1{,}8x + 0{,}4$ (mit WTR)

2.3 $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{7} = 0$ (mit WTR)

2.4 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von u: $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$

3.2 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwölf Würfen kein „Wappen“ zu erhalten, etwa 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt „Wappen“ im dreizehnten Wurf? (mit WTR)

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$

4.2 $2 \cdot 3^{x} = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$ (mit WTR)

4.4 Wie oft muss man einen fairen Würfel mindestens werfen, um mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine „Sechs“ zu erhalten? (mit WTR)

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differenzialrechnung

Beispiele

5.1 Welche Punkte der Normalparabel haben den Abstand $\sqrt{20}$ vom Ursprung?

5.2 Welche Punkte der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $A(3\,|\,5\,|\,3)$ den Abstand $\sqrt{13}$?

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

6.1 $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$

6.2 $\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$

6.3 $2x - 7 = \frac{1}{x-3}$

6.4 $x^{-4} = 81$

7. Trigonometrische Gleichungen

- Bestimmung der Lösungen einfacher trigonometrischer Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall
- nicht: allgemeine Angabe aller Lösungen

Beispiele

7.1 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \le x \le \pi$: $\sin(3x) = -1$

7.2 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \le x \le 2\pi$: $\cos(2x) = -0{,}8$ (mit WTR)

8. Betragsgleichungen

- Lösen einfacher Betragsgleichungen (nur ein Betrag) durch Fallunterscheidung (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)

Beispiel

8.1 Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6\,|\,6\,|\,6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene $E_a: 3x_2 + x_3 = a$?

9. Ungleichungen

- Lösen von Ungleichungen, die über die entsprechende Gleichung und anschließende funktionale Betrachtung gelöst werden können
- nicht: Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen

Beispiele

9.1 $-x^2 + 3x + 7 > 3$

9.2 $(x+3)(x-1) > 0$

9.3 $(2x-1)\cdot e^{-2x} < 0$

(siehe auch 2.4 und 4.4)

10. Lineare Gleichungssysteme

- Lösung eines LGS (einfache Koeffizienten) mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens
- nicht: Lösung eines LGS mit Parameter (bzw. Aussagen zu seiner Lösbarkeit)

Beispiele

10.1
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= -21 \end{aligned}$$

10.2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und besitzt den Extrempunkt $E(1\,|\,1)$.

Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung.

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsvariablen)
- keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Operatoren

Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten, interpretieren, erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
angeben *nennen*	• kein Ansatz, keine Begründung
beschreiben	• keine Begründung
beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
berechnen	• mathematischer Ansatz • nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
grafisch darstellen *zeichnen*	• möglichst genaue Darstellung
skizzieren	• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen • Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert“ gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Baden-Württemberg

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Prüfungsfach: **M a t h e m a t i k**

Musteraufgabe 2019 **Pflichtteil** **Blatt 1 - 2**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot \cos(x^2 + 1)$.

(2 VP)

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

(2 VP)

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 - 2) \cdot (e^x + 1) = 0$.

(2 VP)

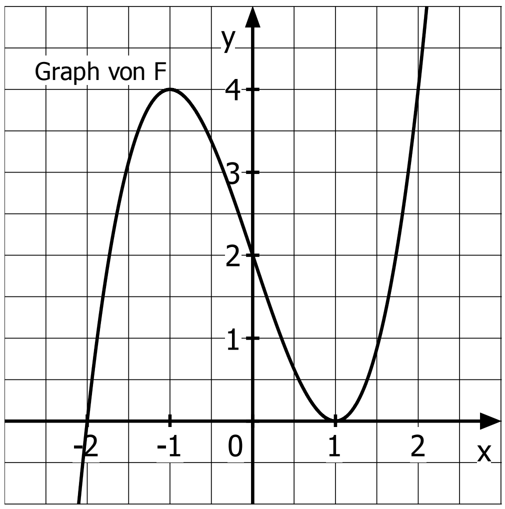
Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f .
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(3) $f\big(F(-2)\big) > 0$



(4 VP)

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 12 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

b) Berechnen Sie den Abstand von g und E.

c) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an E.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

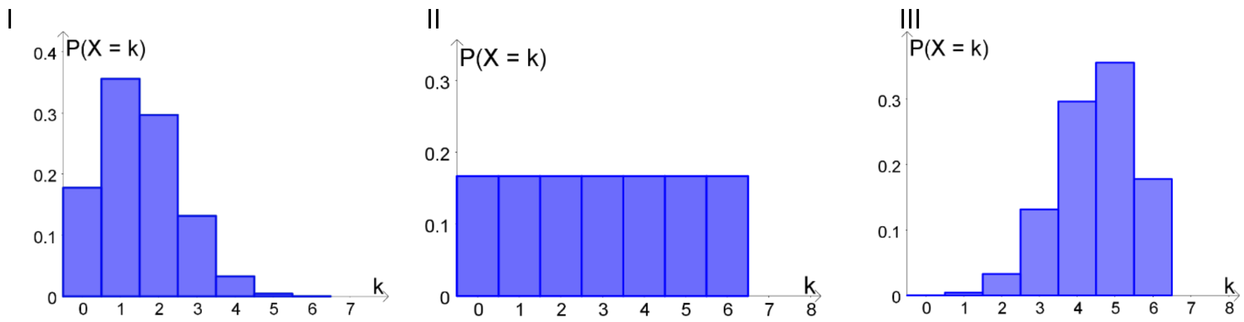
(4,5 VP)

Aufgabe 7

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen X dar:



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet.

(6 VP)

b) Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.

(3 VP)

c) Der Graph K* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K* gehörenden Funktion f*.

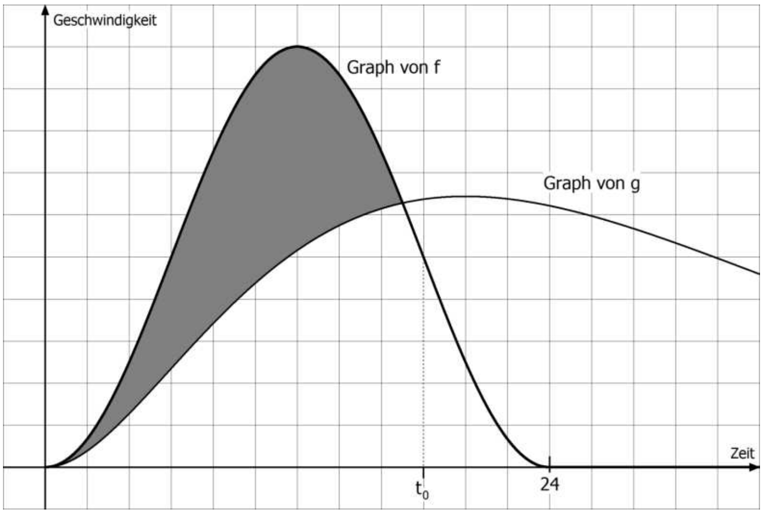
(2 VP)

d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0 | 4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

(4 VP)

Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, f(t) und g(t) in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



a) Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start.
Die Stelle t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von f.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.

(2 VP)

b) Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.
Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)dt = \int_0^{24} f(t)dt$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

(3 VP)

Aufgabe A 2.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$\text{I} \quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$\text{II} \quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \qquad b \in \mathbb{R}$$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt.

(2,5 VP)

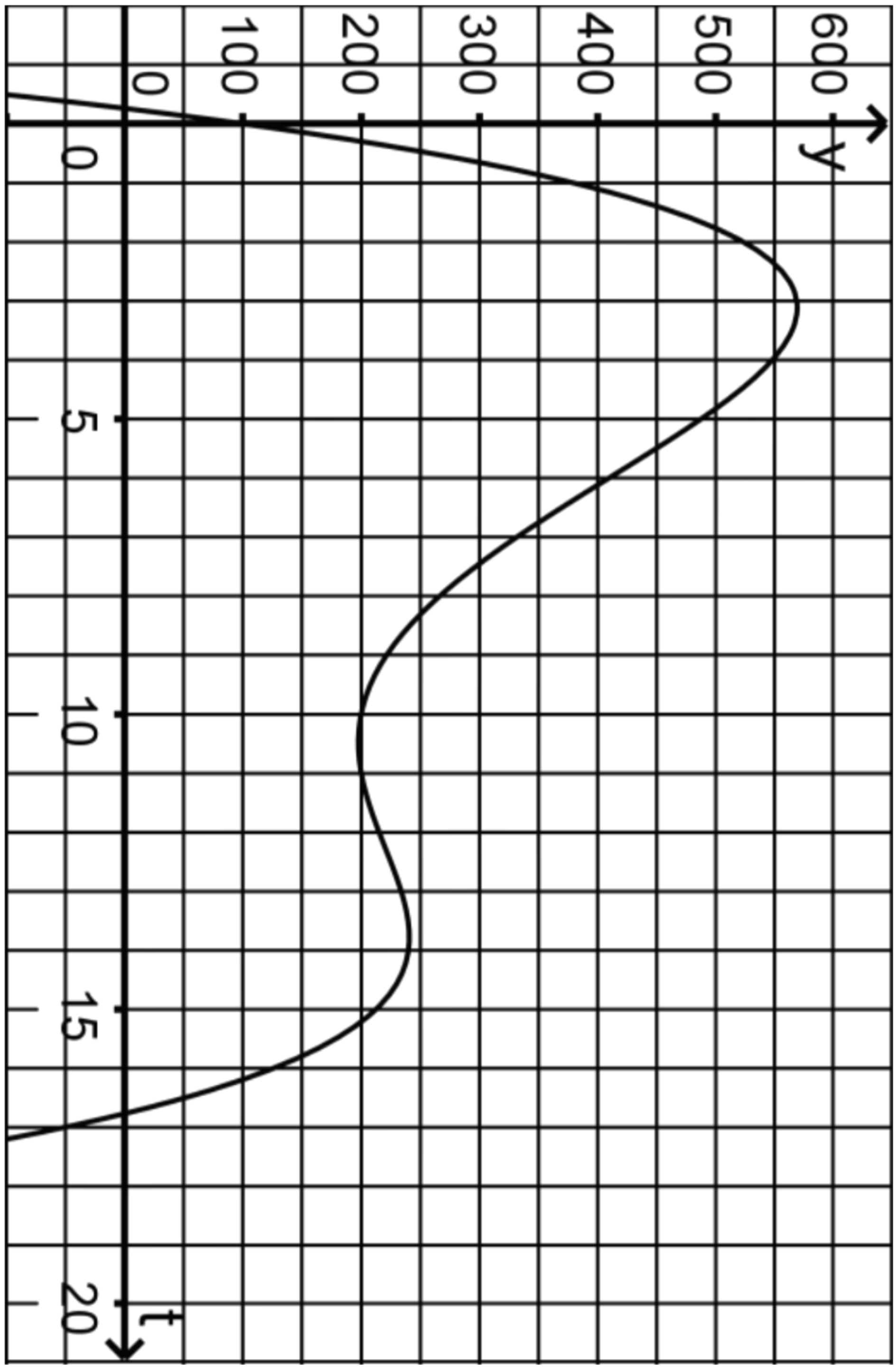
Zu- und Vorname: ____________________

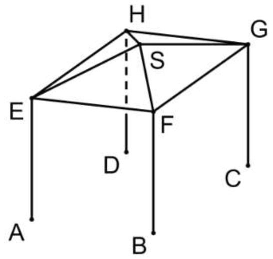
Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ____________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 2.1





Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte $A(2\,|\,-3\,|\,-0{,}5)$, B, C und $D(-3\,|\,-2\,|\,-0{,}5)$ sowie $E(2\,|\,-3\,|\,4)$, $F(3\,|\,2\,|\,4)$, $G(-2\,|\,3\,|\,4)$ und $H(-3\,|\,-2\,|\,4)$ dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0\,|\,0\,|\,5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(4 VP)

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

(2 VP)

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

(2,5 VP)

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird.
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

(1,5 VP)

Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,5\,|\,-4)$ und $C(-2\,|\,8\,|\,2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.
Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.
500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.

(3 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.
Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.

(3,5 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

(3,5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5 %
2-Personen-Haushalte	34,5 %
3-Personen-Haushalte	12,5 %
4-Personen-Haushalte	9,2 %
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3 %

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt."
B: „Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonen-haushalte."
C: „Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte."

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

(2 VP)

c) Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen. Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % die Nullhypothese

H_0: „Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5 %."

getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Zum Pflichtteil

Aufgabe 1

$f'(x) = 3 \cdot \cos(x^2+1) - 6x^2 \cdot \sin(x^2+1)$ (2 VP)

Aufgabe 2

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2$ (2 VP)

Aufgabe 3

$(x^2-2)\cdot(e^x+1) = 0$ gilt wegen $e^x+1>0$ genau dann, wenn $x^2-2=0$.
Damit ergeben sich die Lösungen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. (2 VP)

Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist wahr: Dem Graphen lässt sich $F(1)=0$ entnehmen. Da $x=1$ außerdem eine Minimumstelle von F ist, gilt $f(1)=F'(1)=0$. (1,5 VP)
(2) Die Aussage ist wahr: Der Graph von F besitzt in diesem Bereich eine Wendestelle. (1 VP)
(3) Die Aussage ist falsch: Dem Graphen lässt sich $f(F(-2)) = f(0) < 0$ entnehmen. (1,5 VP)

Aufgabe 5

$L = \{(-3+7t\,;\,3-t\,;\,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ (2 VP)

Das Gleichungssystem stellt drei Ebenen im Raum dar, die Lösungsmenge stellt die gemeinsame Schnittgerade der drei Ebenen dar. (1 VP)

Aufgabe 6

a) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Geraden g. Da $\overrightarrow{n_E}\cdot\vec{u} = 2-2+0=0$, verläuft g parallel zu E. (1 VP)

b) $d(g,E) = \frac{|2\cdot(-2)-4+2\cdot4-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 3$ (1,5 VP)

c) Hilfsgerade k durch $P(-2\,|\,4\,|\,4)$, orthogonal zu E: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt von k mit E: $2\cdot(-2+2t)-(4-t)+2\cdot(4+2t)=9$ führt zu $t=1$

$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ (2 VP)

Aufgabe 7

a) $0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$ (1 VP)

b) Abbildung I zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung, X ist jedoch binomialverteilt.
Der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Die in Abbildung III gezeigte Verteilung besitzt einen größeren Erwartungswert. (1,5 VP)

<u>Zum Wahlteil</u>

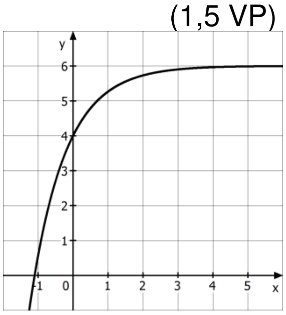
Aufgabe A 1.1

a) <u>Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u> (2 VP)
$f(0) = 4$, somit ist $S_y(0\,|\,4)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(3)$, somit ist $S_x(-\ln(3)\,|\,0)$ der Schnittpunkt mit der x-Achse.

<u>Gleichung der Asymptote</u> (0,5 VP)
$y = 6$

<u>Monotonie</u> (1,5 VP)
$f'(x) = 2e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, somit ist f streng monoton steigend.

<u>Skizze</u> (1 VP)
siehe Abb. rechts



<u>Winkel</u> (1 VP)
$f'(-\ln(3)) = 6$, also $\tan\alpha = 6$ und somit $\alpha \approx 80{,}5°$

b) <u>Flächeninhalt</u> (3 VP)

$$A = \lim_{u\to\infty} \int_0^u (6 - f(x))dx = \lim_{u\to\infty} \left[-2e^{-x}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty} \left(-2e^{-u} + 2\right) = 2$$

c) <u>Gleichung von f*</u> (2 VP)
K* entsteht, indem man K um 1 LE nach unten verschiebt, danach an der x-Achse spiegelt und schließlich wieder um 1 LE nach oben verschiebt:
$f^*(x) = -(f(x) - 1) + 1 = 2 - f(x) = 2e^{-x} - 4$

d) <u>Gleichung der Parabel</u> (4 VP)
Ansatz: $y = a(x - b)^2 + 5$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$
Punktprobe mit $S(0\,|\,4)$ führt zu $4 = ab^2 + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{b^2}$. Vergleich der Tangentensteigungen in $S(0\,|\,4)$ führt zu $f'(0) = -2ab = 2 \Leftrightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$ und somit $a = -1$.
Gleichung der Parabel: $y = -(x - 1)^2 + 5$

Aufgabe A 1.2

a) Beschreibung der Bewegung (1 VP)

Das Fahrzeug F beschleunigt zunächst und bremst dann wieder ab, um nach 24 Sekunden zum Stillstand zu kommen.

Bedeutung der Wendestelle (1 VP)

Die Stelle t_0 ist der Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug F am stärksten bremst.

b) Deutung des Flächeninhalts (2 VP)

Der Inhalt der Fläche entspricht dem maximalen Vorsprung, den das Fahrzeug F während der Fahrt gegenüber dem Fahrzeug G hat.

Frage im Sachzusammenhang (1 VP)

Zu welchem Zeitpunkt hat das Fahrzeug G denselben Weg zurückgelegt, den das Fahrzeug F innerhalb der ersten 24 Sekunden zurücklegt?

Aufgabe A 2.1

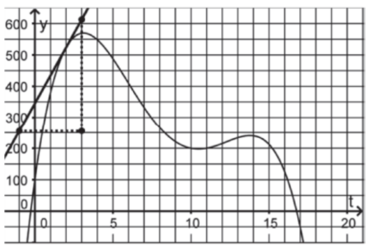
a) Volumen des Wassers (0,5 VP)

Dem Graphen entnimmt man, dass das Volumen fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn etwa 490 m^3 beträgt.

Zeitraum (1 VP)

Dem Graphen entnimmt man, dass das Wasservolumen im Zeitraum von etwa 0,9 Stunden bis etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mindestens 350 m^3 beträgt.

Momentane Änderungsrate (2 VP)



$$f'(2) \approx \frac{360}{4} = 90$$

Die momentane Änderungsrate zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa 90 m^3 pro Stunde.

Begründung (1,5 VP)

Hätte die Funktionsgleichung von f die Form I, dann müsste der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

Hätte die Funktionsgleichung von f die Form II, dann besäße der Graph von f höchstens zwei Extremstellen, da f eine ganzrationale Funktion dritten Grades wäre.

b) Verfahren (1,5 VP)

Man zeichnet die Tangente an den Graphen von f im Punkt P(15|f(15)) ein. Die Stelle, an der diese Tangente die x-Achse schneidet, stellt den gesuchten Zeitpunkt dar.

Interpretation (1,5 VP)

Die Lösungen der Gleichung beschreiben Zeitpunkte, in denen das Becken 350 m^3 mehr Wasser enthält als sechs Stunden später.

Lösung (0,5 VP)

Eine Lösung ist beispielsweise $t \approx 4$.

c) Zeitpunkt (2,5 VP)

$g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$, die notwendige Bedingung $g'(t) = 0$ führt zur Gleichung

$t^2 - 13t + 30 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 3$ und $t_2 = 10$.

Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

Zeitraum (2 VP)

$g(t) = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) = 0$. Lösungen sind $t_3 = 0$, $t_4 = 7{,}5$ und $t_5 = 12$.

Wegen $g(3) = 97{,}2$, $g(8) = -12{,}8$ und $g(15) = 270$ nimmt das Wasser im Zeitraum zwischen 7,5 Stunden und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) Volumen (2 VP)

$$350 = V_0 + \int_0^3 g(t)\,dt \Leftrightarrow V_0 = 350 - \int_0^3 g(t)\,dt = 350 - \left(G(3) - G(0)\right) = 150{,}2$$

Zu Beobachtungsbeginn betrug das Wasservolumen etwa 150 m^3.

Zeitpunkt gleiches Wasservolumen (2,5 VP)

Es muss ein a mit $0 < a \leq 15$ geben mit $\int_0^a g(t)\,dt = 0$. Dies führt auf die Gleichung

$a^4 - 26a^3 + 180a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot \left(a^2 - 26a + 180\right) = 0$. Die einzige Lösung ist $a_1 = 0$.

Es gibt also keinen solchen Zeitpunkt.

Aufgabe A 2.2

Wert von u (0,5 VP)

$$u = \frac{\pi}{c}$$

Flächeninhalt (2 VP)

$$A = \int_0^u c\sin(cx)\,dx = \left[-\cos(cx)\right]_0^u = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

Aufgabe B 1

a) Nachweis des Quadrats (2 VP)

Es ist $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist EFGH ein Parallelogramm.

Wegen $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{FG}|$ und $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ ist EFGH ein Quadrat.

Koordinatengleichung von L (2 VP)

Aus $\overrightarrow{n_L} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{n_L} \cdot \overrightarrow{ES}$ erhält man $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Aus einer Lösung ergibt sich $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Mittels Punktprobe mit S erhält man $L: 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$.

b) Länge des Schattens (2 VP)

Man berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts F der Ebene L und der Geraden, die durch den Punkt T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SF}$ ist die Länge des Schattens in Metern.

c) Verhältnis der beiden Längen (1,5 VP)

Wählt man $M(2\,|-3\,|\,3{,}5)$ auf der Strecke AE und N auf der Strecke EF, also $N(2+t\,|-3+5t\,|\,4)$ mit $0 < t < 1$, so liefert die Bedingung $|\overrightarrow{MN}| = 2{,}1$ die Gleichung $\sqrt{t^2 + 25t^2 + 0{,}25} = 2{,}1$ mit der Lösung $t = 0{,}4$.

Das gesuchte Verhältnis ist also $\frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$.

d) Mögliche Positionen der Kletterstange (1,5 VP)

Mit $A'(2\,|-3\,|\,0)$ und $B'(3\,|\,2\,|\,0)$ ergeben sich z.B. $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit sind mögliche Punkte $P_1(\frac{8}{3}\,|\,\frac{1}{3}\,|\,0)$ und $P_2(4\,|\,7\,|\,0)$.

Aufgabe B 2

a) Nachweis rechter Winkel (1 VP)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}=-12-12+24=0.$$

Koordinatengleichung von E (2 VP)

Aus $\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ erhält man zum Beispiel $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

Mittels Punktprobe mit A erhält man $E: 2x_1+2x_2+x_3=14$.

Koordinaten von D (1 VP)

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$, somit $D(0\,|\,4\,|\,6)$.

Nachweis (1 VP)

$$A_{Rechteck}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|=6\cdot 9=54$$

b) Pyramidenspitze (2,5 VP)

$$V=\frac{1}{3}G\cdot h\Leftrightarrow h=\frac{3V}{G}=\frac{3\cdot 108}{54}=6$$

Beispielsweise $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+6\cdot\frac{1}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|}\cdot\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{6}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix}$, somit $S(10\,|\,5\,|\,2)$.

c) Anteil des Flächeninhaltes (2,5 VP)

A liegt in der x_1x_2-Ebene, B unterhalb und C oberhalb der x_1x_2-Ebene.
Die Strecke BC schneidet die x_1x_2-Ebene im Punkt $F(0\,|\,7\,|\,0)$.
Das Dreieck ABF ist rechtwinklig bei B und hat die Seitenlängen $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$ und $\left|\overrightarrow{BF}\right|=6$.
Somit hat die Teilfläche den Inhalt 18 FE.

Aufgabe C 1

a) Wahrscheinlichkeit für mindestens 6 nicht defekte Lampen (1 VP)

X_1: Anzahl der defekten Lampen, X_1 ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}09$.

$P(X_1 \le 4) \approx 0{,}999$

Wahrscheinlichkeit im Zshg. mit Erwartungswert (2 VP)

X_2: Anzahl der defekten Lampen, X_2 ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}09$.

$E(X_2) = 500 \cdot 0{,}09 = 45$,

$P(45 \cdot 0{,}9 \le X_2 \le 45 \cdot 1{,}1) = P(41 \le X_2 \le 49) = P(X_2 \le 49) - P(X_2 \le 40) \approx 0{,}518$

b) Wahrscheinlichkeit, dass der Händler den Karton annimmt (1,5 VP)

$\frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 0{,}634$

Maximale Anzahl der defekten Lampen (1,5 VP)

a: Anzahl der defekten Lampen, p: Wahrscheinlichkeit, dass Händler den Karton annimmt

$p(a) = \frac{30-a}{30} \cdot \frac{29-a}{29}$,$p(8) \approx 0{,}531$ $p(9) \approx 0{,}483$

Es dürfen höchstens 8 defekte Lampen im Karton sein.

c) Mittlerer zu erwartender Gewinn (3,5 VP)

G: Gewinn in €

Ereignis	Lampe stammt von Firma A und ist defekt	Lampe stammt von Firma A und ist intakt	Lampe stammt von Firma B und ist defekt	Lampe stammt von Firma A und ist intakt
k	$-0{,}98$	$0{,}51$	$-1{,}02$	$0{,}47$
$P(G = k)$	$0{,}35 \cdot 0{,}09$	$0{,}35 \cdot 0{,}91$	$0{,}65 \cdot 0{,}07$	$0{,}65 \cdot 0{,}93$

$E(G) = -0{,}98 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}09 + 0{,}51 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}91 - 1{,}02 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}07 + 0{,}47 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}93 \approx 0{,}37$

Der im Mittel pro Lampe zu erwartende Gewinn beträgt etwa 37 Cent.

Aufgabe C 2

a) Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A (0,5 VP)
Die Anzahl X_1 der 1-Personen-Haushalte ist $B_{100;0,405}$-verteilt.
$P(A) = P(X_1 = 40) \approx 0{,}081$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B (1 VP)
Die Anzahl X_2 der Mehrpersonenhaushalte ist $B_{100;0,595}$-verteilt.
$P(B) = P(X_2 \geq 50) \approx 0{,}978$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C (2 VP)
Die Anzahl X_3 der 4-Personen-Haushalte ist $B_{90;0,092}$-verteilt.
$P(C) = 0{,}908^{10} \cdot P(X_3 \leq 5) \approx 0{,}059$

b) Mindestanzahl der Haushalte (2 VP)
Die Anzahl X_4 der 2-Personen-Haushalte ist $B_{n;0,345}$-verteilt mit unbekanntem n.
Es soll gelten $P(X_4 > 20) \geq 0{,}95$.
Für n = 79 ist $P(X_4 > 20) \approx 0{,}948$ und für n = 80 ist $P(X_4 > 20) \approx 0{,}955$.
Es hätten mindestens 80 Haushalte ausgewählt werden müssen.

c) Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte (2 VP)
Geht man vereinfachend davon aus, dass in den Haushalten mit mindestens 5 Personen genau fünf Personen leben, und bezeichnet man die Anzahl der Haushalte mit x, so gilt
$\left(1 \cdot 0{,}405 + 2 \cdot 0{,}345 + 3 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}092 + 5 \cdot 0{,}033\right) \cdot x = 80\,000\,000$.
Es ergibt sich $x \approx 40\,000\,000$.
Die Gesamtzahl der Haushalte betrug ca. 40 Millionen.

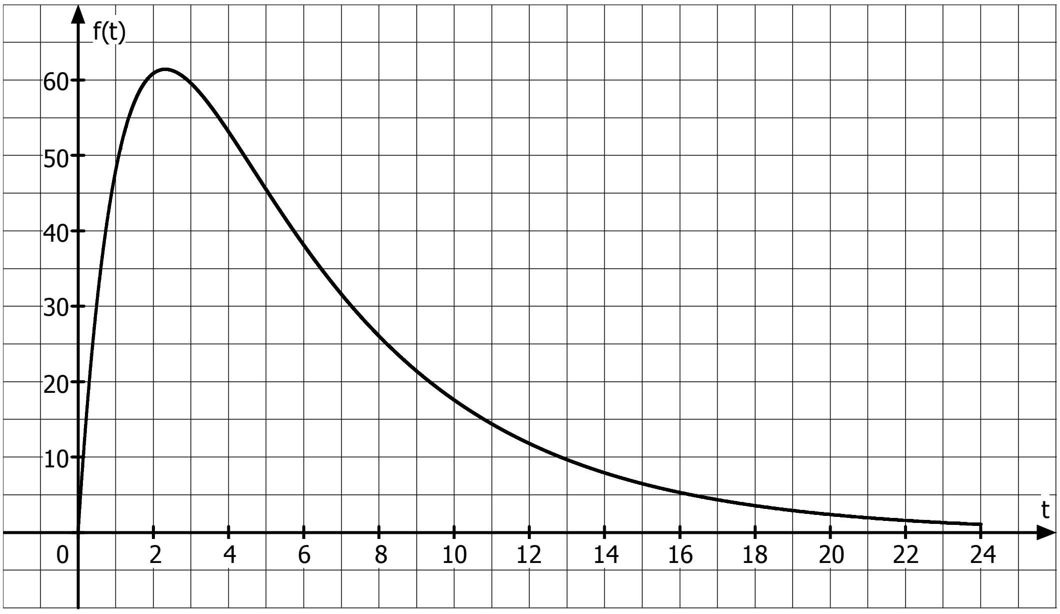
d) Hypothesentest (2,5 VP)
Die Zufallsvariable X_5 beschreibt die Anzahl der 1-Personen-Haushalte. Gilt die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}405$, so ist X_5 im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern n = 500 und p = 0,405. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g mit $P(X \geq g) \leq 0{,}05$.
Es ist $P(X_5 \geq 221) \approx 0{,}051$ und $P(X_5 \geq 222) \approx 0{,}042$.
Entscheidungsregel: Wenn in der Stichprobe die Anzahl der 1-Personen-Haushalte mindestens 222 beträgt, so wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.

Aufgabenfundus Wahlteil

Aufgabe Ana 1

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten durch den Graphen der Funktion f in untenstehender Abbildung beschrieben. Dabei ist t die Zeit seit Verabreichung in Stunden und f(t) die Wirkstoffmenge in mg.
Bestimmen Sie die Wirkstoffmenge und deren momentane Änderungsrate acht Stunden nach Verabreichung.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Wirkstoffmenge mindestens 35 mg beträgt.
Ermitteln Sie die mittlere Wirkstoffmenge innerhalb der ersten vier Stunden.



b) Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05 \cdot t}\right) \quad ; \qquad t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).

Bestimmen Sie die Wirkstoffmenge, die sich langfristig im Blut befinden wird.
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge ständig zunimmt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt.
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.

Gegeben ist die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$.

Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

Aufgabe Ana 2

Der Graph jeder Funktion g_a mit $g_a(x) = ax^2 + 6x + 1 \quad (a \neq 0)$ ist eine Parabel C_a.

Zeigen Sie, dass sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$ berühren.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve S, auf der die Scheitelpunkte aller C_a liegen.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q auf S, der kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a ist.

Aufgabe Ana 3

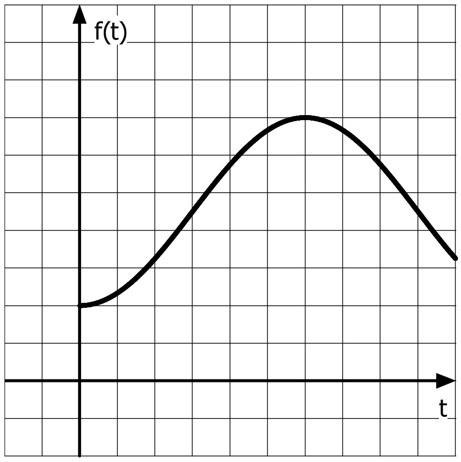
Der Temperaturverlauf an einem Sommertag wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden nach Mitternacht, f(t) in °C).

Ergänzen Sie in der Abbildung des Graphen von f die Skalierungen der Koordinatenachsen.

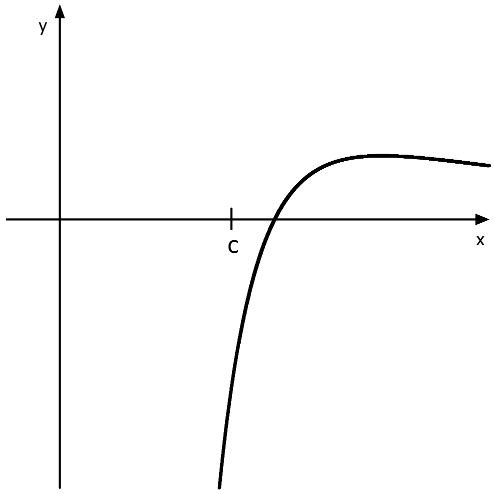
Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr.



Aufgabe Ana 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3}$.

Ein Teil ihres Graphen K ist abgebildet.



a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f und Gleichungen der Asymptoten von K an. K besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse und einen Hochpunkt.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.
Untersuchen Sie f für $x < 0$ auf Monotonie.

b) Die Tangente an K an der Stelle $x = 2$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Wenn dieses Dreieck um die y-Achse rotiert, entsteht ein Körper.
Berechnen Sie dessen Volumen.

c) Für die in der Abbildung eingetragene Stelle c wird die Integralfunktion I_c mit

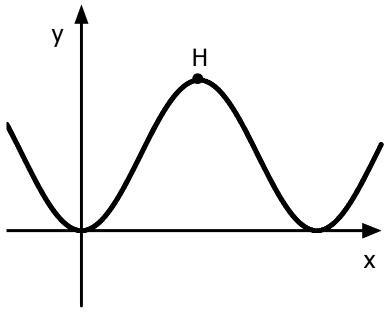
$$I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad (x \geq c)$$ betrachtet.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass I_c mindestens zwei Nullstellen besitzt.

d) K begrenzt mit der x-Achse und der Geraden $x = u$ $(u > 1)$ eine Fläche.
Bestimmen Sie u so, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat.

Aufgabe Ana 5

Abgebildet ist ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = (\sin(x))^2$.



Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Hochpunktes H.

Es gibt reelle Zahlen a, b, d, so dass gilt:

$$g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

Bestimmen Sie diese Zahlen.

Aufgabe Ana 6

Ein quaderförmiger Wassertank hat eine Grundfläche von 2 m^2 und ist zunächst leer. Der Graph in untenstehender Abbildung 1 gibt die momentane Zuflussrate des Wassers in Kubikmeter pro Stunde über einen Zeitraum von sechs Stunden wieder.

Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate des Wassers.
Ermitteln Sie die Wassermenge im Tank nach 1,5 Stunden.
Geben Sie die maximale Wassermenge sowie die Wassermenge nach 6 Stunden an.
Bestimmen Sie, wie hoch das Wasser im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses steht.
Skizzieren Sie unter Verwendung dieser Ergebnisse den Graphen, der die Höhe des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, in Abbildung 2.

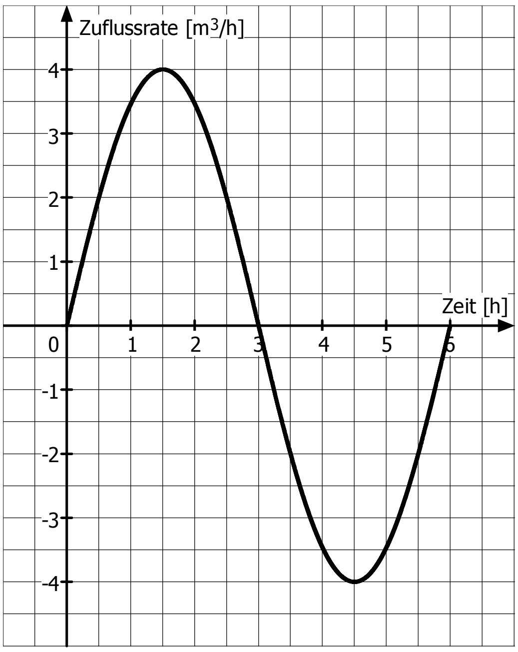


Abbildung 1

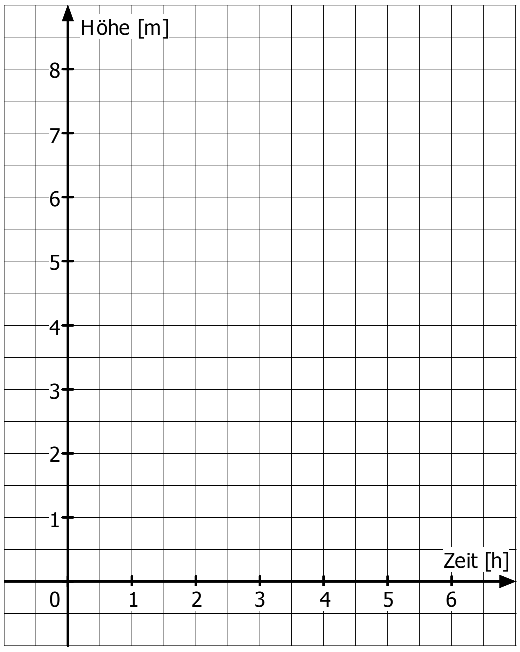
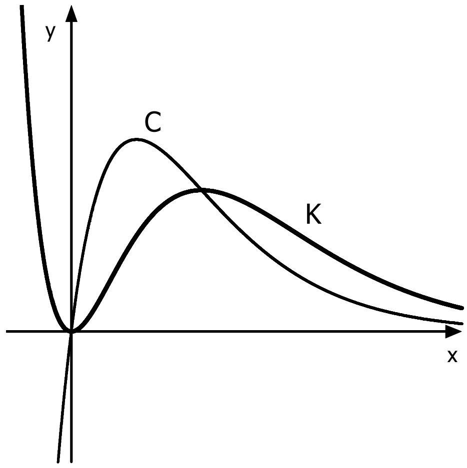


Abbildung 2

Aufgabe Ana 7



Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch
$f(x) = 8x \cdot e^{-x}$ und $g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$.

Deren Graphen sind in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

a) Begründen Sie, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von C und K.

b) Die Gerade x = 1 schneidet K in P und C in Q.
P, Q und der Ursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts von K.
Geben Sie ohne weitere Rechnung an, für welche Werte von a die Gleichung $g(x) = a$ keine, eine bzw. mehrere Lösungen hat.

d) Es gibt Stammfunktionen F von f und G von g, sodass $F(x) - G(x) = g(x)$ gilt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird.

Aufgabe Ana 8

Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x \quad (k > 0)$.

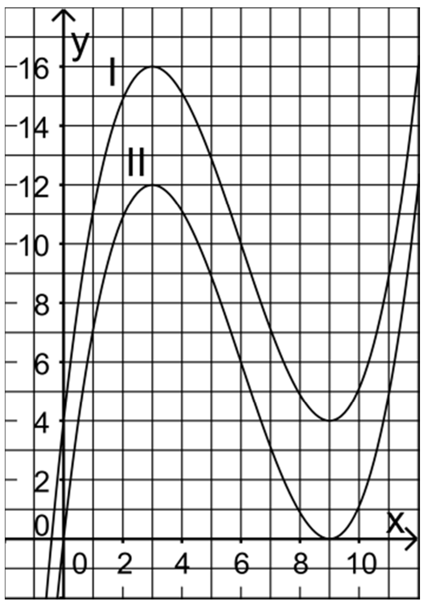
a) Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Weisen Sie nach, dass $f_k\,'(x) = 3 \cdot (kx - 1) \cdot (kx - 3)$ eine Gleichung der ersten Ableitung von f_k ist.

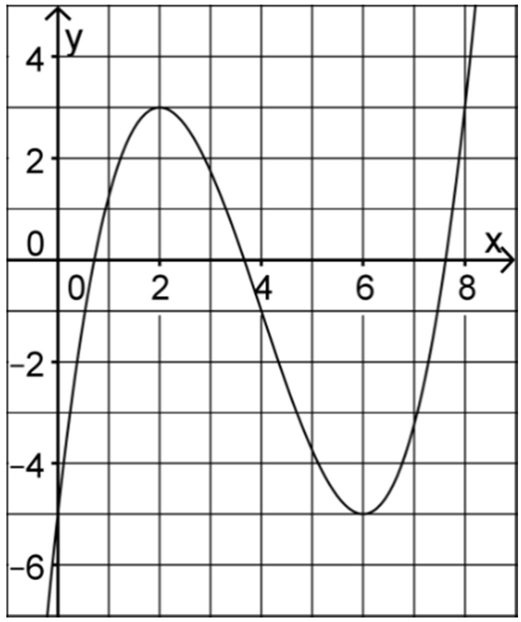
Für jeden Wert von k wird die Tangente an den Graphen von f_k im Wendepunkt $W\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k}\right)$ betrachtet.

Zeigen Sie, dass diese Tangenten für unterschiedliche Werte von k parallel zueinander sind.

b) Die Abbildung zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von f_k sowie den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = f_k(x) + d$ mit $d \in \mathbb{R}$.
Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem der beiden Graphen I und II zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
Bestimmen Sie die Werte von k und d.



Aufgabe Ana 9



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$$

und Definitionsmenge IR. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.

Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.

b) Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.
Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.
Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $P(4 \mid -1)$ ist.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ gilt.

Bestimmen Sie damit ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

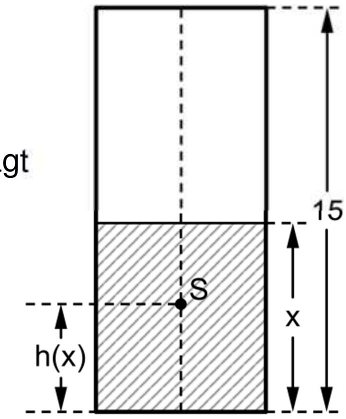
c) Die Funktion f gehört zur Schar der in IR definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5 \quad \text{und} \quad a \in \mathbb{R}.$$

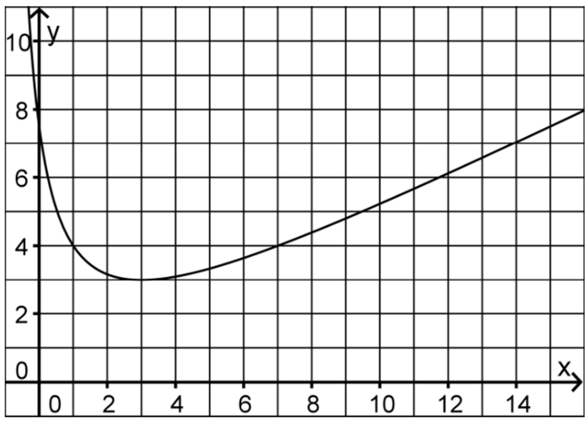
Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.
Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

Aufgabe Ana 10

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung rechts).



Die Abbildung unten zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $T(3|3)$.



a) Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.
Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist.
Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.
Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.

b) Für die Funktion h gilt $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt.

c) Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm.
Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t.

Aufgabe Geo 1

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Körper ABCDPQRS mit $A(28|0|0)$, $B(28|10|0)$, $C(0|10|0)$, $D(0|0|0)$ und $P(20|0|6)$ gegeben. Die Grundfläche ABCD, die Deckfläche PQRS und die vier Seitenflächen des Körpers sind Parallelogramme.

a) Stellen Sie den Körper in einem Koordinatensystem grafisch dar.
Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Teilergebnis: $E: 3x_1 + 4x_3 = 84$)

Der Körper beschreibt modellhaft den unteren Teil eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit. Dieser untere Teil ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(11|3|6)$ der Deckfläche aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.

b) Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.

c) Auf der Deckfläche des Betonkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von 0,8 m. Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Körpers im Punkt K.
Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von K bekannt wären.

d) Zum Schutz vor Beschädigungen während einer Baumaßnahme soll diejenige Seitenfläche des Kunstwerks, die im Modell durch das Quadrat ABQP dargestellt wird, mit einer rechteckigen Holzplatte so versehen werden, dass diese am Kunstwerk anliegt, sowohl unten als auch seitlich bündig mit diesem abschließt und in einer Höhe von 1 m über der Deckfläche endet.
Untersuchen Sie, ob die Lage der Stahlstange das Anbringen der Holzplatte zulässt.

Aufgabe Geo 2

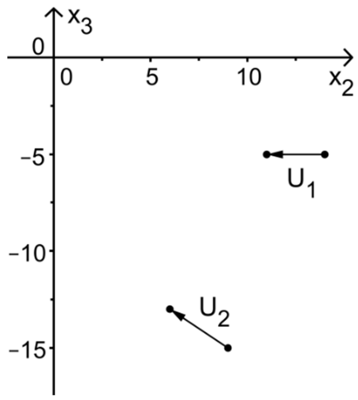
Die Bewegungen zweier Forschungs-U-Boote U_1 und U_2, die von einer Forschungsstation mithilfe eines Sonarsystems geortet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell, das den Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr erfasst, bewegen sich beide U-Boote geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, U_1 entlang der Geraden g_1, U_2 entlang der Geraden g_2. Die Positionen von U_1 um 12.20 Uhr und 12.21 Uhr werden durch die Punkte $P_0(4|14|-5)$ bzw. $P_1(6|11|-5)$ dargestellt, die Positionen von U_2 zu denselben Zeitpunkten durch $Q_0(11|9|-15)$ bzw. $Q_1(9|6|-13)$. Die Wasseroberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene, die Lage der Forschungsstation durch den Punkt $F(12|11{,}5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von g_1.
Geben Sie für den dabei verwendeten Parameter das Intervall an, das dem erfassten Zeitraum entspricht.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes an, der die Position von U_1 um 12.27 Uhr darstellt.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von U_1 in Knoten (1 Knoten $\approx$ 1,852 km/h).

b) Die Geraden g_1 und g_2, entlang derer sich U_1 und U_2 im Modell bewegen, sind windschief zueinander.
Beschreiben Sie, wie man dies mithilfe der Gleichungen von g_1 und g_2 zeigen könnte.
Geben Sie für jeden Schritt des beschriebenen Vorgehens die Bedeutung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Geraden an.

c) Um 12.23 Uhr wird die Position des U-Boots U_1 durch den Punkt $R(10|5|-5)$ dargestellt.
Zeigen Sie, dass der Punkt R von der Geraden g_2 den Abstand 7 hat.
Begründen Sie, dass daraus nicht geschlossen werden kann, dass die U-Boote um 12.23 Uhr 700 m voneinander entfernt sind.

d) Die Abbildung zeigt die Bewegungen von U_1 und U_2 im Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.21 Uhr als senkrechte Projektion in die x_2x_3-Ebene.
Stellen Sie die Bewegungen der beiden U-Boote für den gesamten erfassten Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr als senkrechte Projektion in die x_1x_2-Ebene grafisch dar.
Begründen Sie anhand dieser beiden Projektionen, dass sich die Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 bewegen, nicht schneiden.



Aufgabe Geo 3

Gegeben sind die Ebene $E: 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

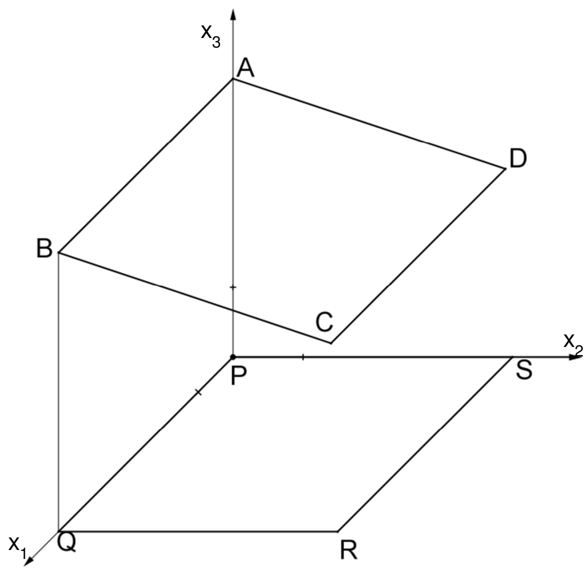
a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E.
Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Gerade g_a orthogonal zu g_4 ist.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Geben Sie eine Gleichung an, mit der sich derjenige Wert von a bestimmen lässt, für den der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10°$ hat.

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F: x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

Aufgabe Geo 4

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $P(0|0|0)$, $Q(5|0|0)$, $R(5|4|0)$, $S(0|4|0)$ die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(5|0|4)$, $C(5|3{,}9|2{,}7)$, $D(0|3{,}9|2{,}7)$ beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand.

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30 cm hohe Stablampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD.
Untersuchen Sie, ob der Regenschutz dabei die Stablampe berühren kann.
Berechnen Sie den Abstand von der Hauswand, den die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben darf, damit dies nicht passiert.

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

Aufgabe Sto 1

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln 180° (rot), 90° (gelb) und 90° (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf.
B: Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf.

b) Bestimmen Sie, wie oft man das Glücksrad mindestens drehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten: Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler Verlust macht, wenn er dieses Spiel einmal spielt.

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint.
Berechnen Sie denjenigen Wert von p, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten ist.

Aufgabe Sto 2

Bei einem Schulfest gibt es verschiedene Attraktionen.

a) Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten. Zwei der Karten sind Joker. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Franz gewinnt.
B: Hilde gewinnt.

b) Das Glücksrad der Klasse 5a hat 32 gleich große Felder. Davon sind 8 als Gewinnfelder markiert. Wenn beim Drehen eines dieser Felder erscheint, gewinnt man.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 50 Spielen mindestens zehn Mal gewinnt.
Das Glücksrad der Klasse 5b hat 30 gleich große Felder. Die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, soll mindestens 95 % betragen.
Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Felder, die als Gewinnfelder markiert werden müssen.

c) Bei einem Spielautomaten erscheint auf Knopfdruck ein Bildsymbol: entweder eine Sonne oder ein Mond. Für einen Einsatz von einem Euro darf man zwei Mal nacheinander drücken. Erscheint zwei Mal die Sonne, so erhält man zwei Euro ausbezahlt; erscheint zwei Mal der Mond, so erhält man einen Euro ausbezahlt; in den anderen Fällen erhält man nichts ausbezahlt.
Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für Sonne sein muss, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe Sto 3

Ein Hotel hat 150 Zimmer. Für sein beliebtes Wochenendangebot liegen immer deutlich mehr als 150 Anfragen für Reservierungen vor. Da die Hotelleitung im vergangenen Jahr die Erfahrung gemacht hat, dass im Mittel nur 90 % der Reservierungen in Anspruch genommen werden, entschließt sie sich nun, immer 160 Reservierungen anzunehmen. Die Anzahl der Reservierungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Diese wird als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   E_1: Genau 150 Reservierungen werden in Anspruch genommen.
   E_2: Es müssen Gäste, die reserviert haben, abgewiesen werden.
   E_3: Alle Gäste, die ihre Reservierung in Anspruch nehmen wollen, bekommen ihr Zimmer.

b) Falls Gäste, die reserviert haben, wegen Überbuchung kein Zimmer bekommen, müssen sie auf Kosten des Hotels in einem teureren Hotel in der Nähe untergebracht werden. Die Hotelleitung will daher erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter 1 % liegt.
   Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Reservierungen, die sie dann höchstens annehmen darf.

Die Hotelleitung überlegt, ob sie das Hotel mit einer Sauna ausstatten soll. Das Vorhaben soll aber nur dann umgesetzt werden, wenn mehr als 20 % der Gäste dieses kostenpflichtige Angebot auch nutzen würden. Die Nullhypothese

H_0: *„Höchstens 20 % der Gäste würden die Sauna nutzen."*

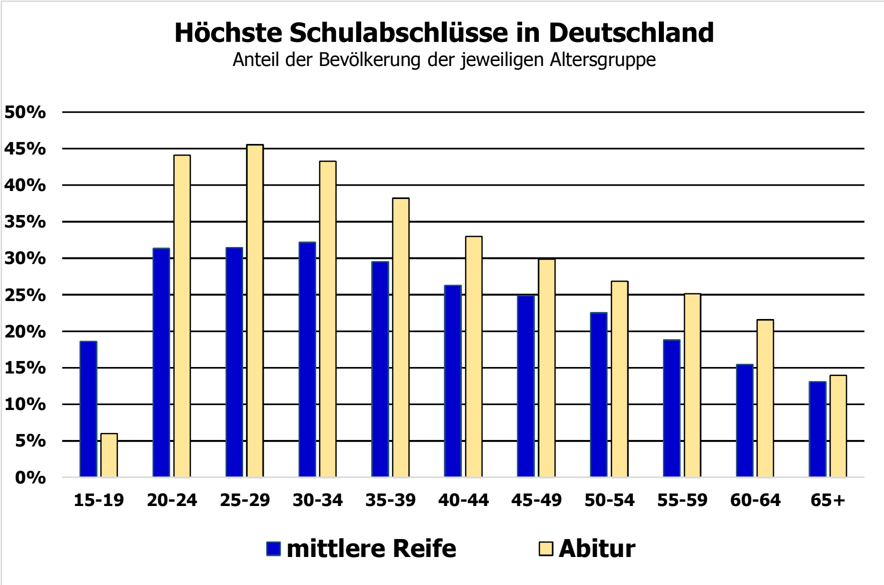
soll auf der Basis einer Umfrage bei 300 Gästen auf einem Siginifikanzniveau von 5 % getestet werden.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Vor der Konzeption des Tests stellte die Hotelleitung folgende Überlegungen an:
   I: Wenn die Sauna nicht gebaut wird, obwohl sie mehr als 20 % der Gäste nutzen würden, entgehen dem Hotel zusätzliche Einnahmen.
   II: Wenn die Sauna gebaut wird, obwohl sie höchstens 20 % der Gäste nutzen, entstehen dem Hotel finanzielle Verluste.
   Für einen dieser beiden Fälle kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit obigem Test auf 5 % begrenzt werden.
   Entscheiden Sie, welcher der beiden Fälle dies ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe Sto 4

Das folgende Diagramm zeigt Daten des statistischen Bundesamts zum jeweils höchsten erreichten Schulabschluss in verschiedenen Altersgruppen (Stand 2012):



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person kein Abitur hat.
Eine andere Statistik gibt an, dass 2012 die Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 bis 49 Jahren größer war als die entsprechende Anzahl bei den 35-39-jährigen Personen.
Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist.

b) Zwanzig Personen im Alter von 55 bis 59 Jahren werden zufällig ausgewählt.
Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: In dieser Gruppe haben genau sechs Personen Abitur.
B: In dieser Gruppe haben höchstens vier Personen Abitur.

c) Zwölf Personen nehmen an einem Abitur-Fernkurs teil. Zehn von ihnen haben bereits die mittlere Reife. Bei jedem von ihnen liegt die Erfolgschance bei 80 %. Bei den beiden anderen beträgt die Erfolgschance jeweils nur 60 %.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
C: Alle zehn Personen mit mittlerer Reife sind erfolgreich.
D: Mindestens elf Personen schließen den Fernkurs erfolgreich ab.

Aufgabe Sto 5

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88 % und liegend mit 93 % Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern.
Gegeben ist die Ungleichung $p^5 + 5 \cdot p^4 \cdot (1-p) \geq 0{,}95$, wobei p die Trefferwahrscheinlichkeit im Stehendschießen ist.
Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Ungleichung führt.

Aufgabe Sto 6

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind.

Lösungshinweise zum Aufgabenfundus Wahlteil

Aufgabe Ana 1

a) Wirkstoffmenge und momentane Änderungsrate

Abbildung 1 lässt sich $f(8) \approx 26$ entnehmen. Durch grafisches Ableiten erhält man $f'(8) \approx -5$.

Acht Stunden nach Verabreichung beträgt die Wirkstoffmenge 26 mg, die momentane Änderungsrate beträgt zu diesem Zeitpunkt -5 mg/h.

Zeitraum

Anhand Abbildung 1 erkennt man, dass die Wirkstoffmenge im Zeitraum von 0,6 Stunden bis 6,5 Stunden nach der Verabreichung mindestens 35 mg beträgt.

Mittlere Wirkstoffmenge

Durch Auszählen von Kästchen erhält man $\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt \approx \frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 5 = 50$.

Die mittlere Wirkstoffmenge beträgt 50 mg.

b) Langfristige Wirkstoffmenge

$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(80 \cdot \left(1 - \underbrace{e^{-0,05\cdot t}}_{\to 0}\right)\right) = 80$, langfristig werden sich 80 mg im Blut befinden.

Nachweis für ständige Zunahme

$g'(t) = 80 \cdot 0,05e^{-0,05t} = 4e^{-0,05t} > 0$ für alle t. Somit nimmt die Wirkstoffmenge ständig zu.

Zeitpunkt

$g'(t) = 1 \Leftrightarrow 4e^{-0,05t} = 1 \Leftrightarrow -0,05t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) \approx 27,7$

Nach etwa 28 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate 1 mg/min.

Mittlere Wirkstoffmenge

$$m = \frac{1}{240}\int_0^{240} g(t)dt = \frac{1}{240}\left[80 \cdot \left(t + \frac{1}{0,05}e^{-0,05t}\right)\right]_0^{240} \approx 73,3$$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 4 Stunden beträgt etwa 73,3 mg.

Frage im Sachzusammenhang

Wann beginnt ein 15-Minuten-Zeitraum, in welchem die Wirkstoffmenge im Blut um 30 mg zunimmt?

Aufgabe Ana 2

Nachweis

Es ist $g_a'(x) = 2ax + 6$, also ist $g_a'(0) = 6$ für alle a. Mit $g_a(0) = 1$ für alle a folgt, dass sich alle Parabeln im Punkt P berühren.

Ortskurve S

Der Scheitelpunkt ist ein Extrempunkt.

x-Koordinate: $g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{a}$, und somit ist $a = -\frac{3}{x}$

y-Koordinate: $g_a\left(-\frac{3}{a}\right) = a \cdot \frac{9}{a^2} - \frac{18}{a} + 1 = -\frac{9}{a} + 1$

Als Gleichung der Kurve S ergibt sich somit $y = -9 \cdot \frac{-x}{3} + 1 = 3x + 1$.

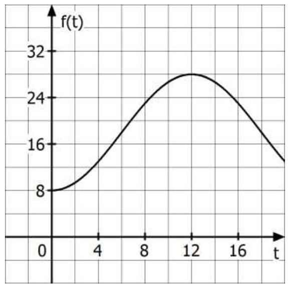
Punkt auf S, der kein Scheitelpunkt einer Parabel ist

Wegen $x = -\frac{3}{a}$ gilt $x \neq 0$. Somit ist der Punkt $Q(0\,|\,1)$ ein Punkt auf S, der kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a ist.

Aufgabe Ana 3

Ergänzung der Skalierung

siehe Abb. rechts



Durchschnittstemperatur

$$m = \frac{1}{12}\int_6^{18} f(t)dt = \frac{1}{12}\left[18t - \frac{120}{\pi}\cdot \sin(\tfrac{\pi}{12}t)\right]_6^{18} \approx 24{,}4$$

Die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr beträgt 24,4 °C.

Aufgabe Ana 4

a) Maximale Definitionsmenge

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Gleichungen der Asymptoten

Senkrechte Asymptote $x = 0$, waagrechte Asymptote $y = 0$

Schnittpunkt mit der x-Achse

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ S_x(1\,|\,0)$$

Hochpunkt

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24}{x^4} - \frac{16}{x^3} = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 24 - 16x = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$.

Da dies die einzige Nullstelle der Ableitung ist, ist $H(1{,}5\,|\,1{,}185)$ der Hochpunkt.

Monotonie

$$f'(x) = \underbrace{\frac{24}{x^4}}_{>0} \underbrace{-\frac{16}{x^3}}_{\substack{>0\text{ für}\\ x<0}} > 0$$. Die Funktion f ist für $x < 0$ streng monoton steigend.

b) Volumen

Tangente: $y = f'(2)\cdot(x-2)+f(2) = -\frac{1}{2}(x-2)+1 = -\frac{1}{2}x+2$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind $A(0\,|\,2)$ und $B(4\,|\,0)$.

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 2 = \frac{32}{3}\pi$$

c) Begründung

Wegen $\int_c^c f(t)dt = 0$ ist $x_1 = c$ eine Nullstelle der Funktion I_c.

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass der Inhalt der Fläche, den K mit der x-Achse und der Geraden $x = c$ einschließt, kleiner ist als der Inhalt der nach rechts offenen Fläche, die K mit der x-Achse einschließt. Somit gibt es eine zweite Nullstelle $x_2 > c$ von I_c.

d) Bestimmung von u

$$A(u) = \int_1^u f(x)dx = \left[\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x}\right]_1^u = \frac{4}{u^2}-\frac{8}{u}+4,\ A(u)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{u^2}-\frac{8}{u}+4=1 \overset{u\neq 0}{\Leftrightarrow} 3u^2-8u+4=0$$

$u_1 = \frac{2}{3}$ (irrelevant), $u_2 = 2$.

Aufgabe Ana 5

Hochpunkt

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die x-Koordinate von H die kleinste positive Nullstelle von g' ist. Mit $g'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$ folgt damit $x = \frac{\pi}{2}$ und $H(\frac{\pi}{2}\,|\,1)$.

Zahlen a, b und d

Mit den aufeinanderfolgenden Extrempunkten $T(0\,|\,0)$ und $H(\frac{\pi}{2}\,|\,1)$ erhält man

$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{2\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2}} = 2$ und $d = \frac{1}{2}$.

Aufgabe Ana 6

Maximale Zuflussrate

Der Abbildung entnimmt man die maximale Zuflussrate 4 m^3/h.

Wassermenge nach 1,5 Stunden

Durch Auszählung der Kästchen, die vom Graphen, der x-Achse und der Geraden $x = 1{,}5$ eingeschlossen werden, erhält man $V_{1,5} \approx \frac{15}{4}m^3 = 3{,}75\ m^3$.

Maximale Wassermenge

Die Wassermenge ist nach 3 Stunden maximal und beträgt etwa $V_3 \approx 2\cdot 3{,}75\ m^3 = 7{,}5\ m^3$

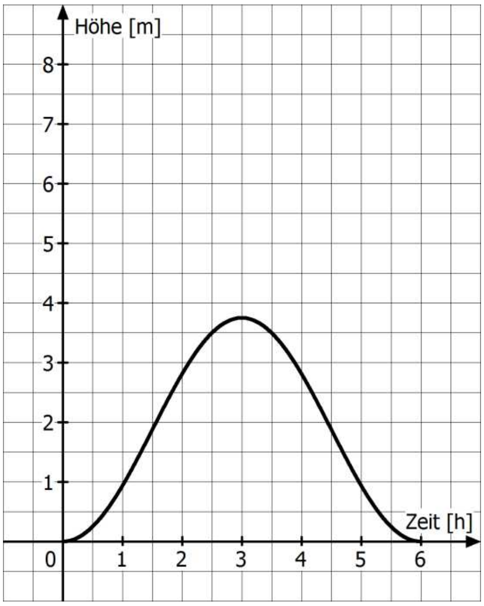
Wassermenge nach 6 Stunden.

Nach 6 Stunden ist der Tank wieder leer.

Höhe des Wasserspiegels

$h = \frac{3,75}{G} = \frac{3,75}{2} = 1,875$. Die Höhe des Wasserspiegels beträgt ca 1,9 m.

Skizze



Aufgabe Ana 7

a) Begründung

Wegen $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ ist C der Graph von f, und somit ist K der Graph von g.

Schnittpunkte

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 8x \cdot e^{-x} = 4x^2 \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} \cdot 4x \cdot (2-x) = 0$, somit $S_1(0\,|\,0)$ und $S_2(2\,|\,2,17)$

b) Flächeninhalt

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (f(1) - g(1)) \approx 0,74$

c) Hochpunkt von K

Notw. Bedingung: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x \cdot e^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x} = 0$, $x_1 = 0$ (irrelevant) $x_2 = 2$ (vgl. a))
Somit $H(2\,|\,2,17)$.

Lösungsanzahl

Die Gleichung $g(x) = a$ hat für $a < 0$ keine Lösung, für $a = 0$ und für $a > 2,17$ eine Lösung, sowie für $0 < a < 2,17$ mehrere Lösungen.

d) Flächeninhalt

$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = [F(x) - G(x)]_0^2 = g(2) - g(0) \approx 2,17$

Aufgabe Ana 8

a) Verhalten für $x \to \pm\infty$

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

Ableitung

Es ist $f_k{}'(x) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$ und auch $3 \cdot (kx-1) \cdot (kx-3) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$.

Parallele Wendetangenten

Es ist $f_k{}'\left(\frac{2}{k}\right) = 3 \cdot k^2 \cdot \frac{4}{k^2} - 12 \cdot k \cdot \frac{2}{k} + 9 = -3$. Also hat die Wendetangente unabhängig von k die Steigung –3. Damit sind diese Tangenten parallel.

b) Zuordnung

Der Graph I gehört zur Funktion h und der Graph II zur Funktion f_k. Denn $f_k(0) = 0$ und nur Graph II verläuft durch den Koordinatenursprung.

Bestimmung der Werte k und d

Es ist $d = 4$, da $h(0) = 0 + d = 4$.

Dem Term von $f_k{}'$ entnimmt man, dass $\frac{1}{k}$ und $\frac{3}{k}$ die Extremstellen von f_k sind.

Der abgebildete Graph hat die Extremstellen 3 und 9. Also ist $k = \frac{1}{3}$.

Aufgabe Ana 9

a) Extrempunkte

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$, der Ansatz $f'(x) = 0$ führt auf $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$, es ist $f''(2) = -3 < 0$ und $f''(6) = 3 > 0$.

Damit ergibt sich der Hochpunkt $H(2|3)$ und der Tiefpunkt $T(6|-5)$.

Anzahl der Lösungen

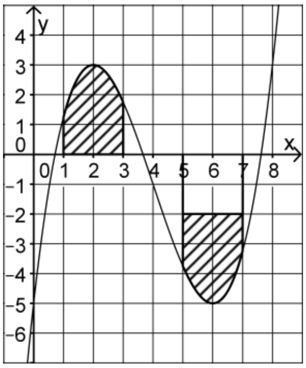
Aus der Anzahl der Schnittpunkte der Geraden mit der Gleichung $y = c$ und dem Graphen von f ergibt sich: Für $c < -5$ und für $c > 3$ besitzt die Gleichung genau eine Lösung. Für $c = -5$ und für $c = 3$ besitzt sie genau zwei Lösungen und für $-5 < c < 3$ besitzt sie genau drei Lösungen.

b) Term zur verschobenen Funktion

$g(x) = \left(\frac{1}{4} \cdot (x+4)^3 - 3 \cdot (x+4)^2 + 9 \cdot (x+4) - 5\right) + 1$

Symmetrie

Der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da der Term nur ungerade x-Potenzen enthält. Da der Graph von f aus dem von g durch Verschiebung um 4 in positive x-Richtung und um 1 in negative y-Richtung hervorgeht, ist der Graph von f damit symmetrisch zum Punkt $P(4|-1)$.



Berechnung des Integrals

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x\right]_1^3 = 5$$

Bestimmung des anderen Integrals

$$\int_5^7 f(x)\,dx = -\left(\int_1^3 f(x)\,dx + 2\cdot 2\right) = -9$$

c) Bestimmung von a

$f_a'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + a$. Die Gleichung $\frac{3}{4}x^2 - 6x + a = 0$ hat die Diskriminante $(-6)^2 - 4\cdot\frac{3}{4}\cdot a = 36 - 3a$. Es ist $36 - 3a < 0 \Leftrightarrow a > 12$.

Für $a > 12$ hat G_a keinen Punkt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

Aufgabe Ana 10

a) Ermittlung der Füllhöhen

Als Lösungen der Gleichung $h(x) = 7{,}5$ lassen sich der Abbildung näherungsweise $x_1 = 0$ und $x_2 = 15$ entnehmen.

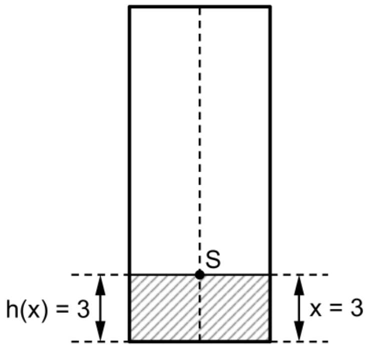
Der Schwerpunkt liegt bei den Füllhöhen 0 cm und 15 cm auf halber Höhe der Dose.

Beschreibung der Bewegung von S

Die Höhe des Schwerpunkts S nimmt zunächst ab und steigt dann wieder bis zum Ausgangswert an.

Situation mit Schwerpunkt in geringster Höhe

Befindet sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe, so liegt er auf der Oberfläche der Flüssigkeit.



b) Ermittlung der Füllhöhen

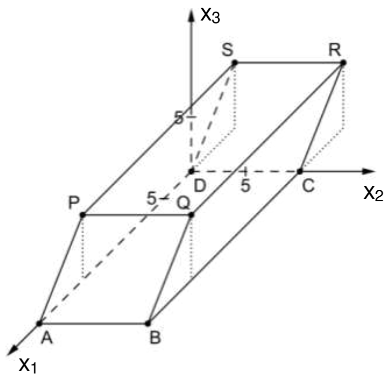
Der Ansatz $h(x) = 4$ führt auf die Gleichung $x^2 - 8x + 7 = 0$ mit den Lösungen $x_3 = 1$ und $x_4 = 7$.

Bei den Füllhöhen 1 cm und 7 cm liegt der Schwerpunkt jeweils 4 cm über dem Dosenboden.

c) Bestimmung von s und t

Die Bedingungen $k(0) = 5{,}5$ und $k(11) = 5{,}5$ führen auf die Gleichungen $s + t = 5{,}5$ und $s + \frac{t}{12} = 0$. Lösung ist $s = -\frac{1}{2}$ und $t = 6$.

Aufgabe Geo 1



a) Darstellung im Koordinatensystem

siehe Abbildung

Koordinatengleichung

Aus $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{AP}$ erhält man $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$. Aus einer Lösung ergibt sich $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mittels Punktprobe mit A erhält man $E: 3x_1 + 4x_3 = 84$.

b) Ende der Stange in der Bohrung

Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche: $H(14\,|\,5\,|\,0)$. Es ist $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{GH}\right| = 7$.

Wegen $\frac{1}{4} \cdot 1{,}4 = 0{,}35 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7$ reicht die Stange im Modell bis zum Mittelpunkt R der Strecke von G nach H. Die Koordinaten des gesuchten Punkts sind $R(12{,}5\,|\,4\,|\,3)$.

c) Überprüfung auf Berührung

Man erhält den Mittelpunkt M der Kugel, indem man K um vier Längeneinheiten in positive x_3-Richtung verschiebt. Anschließend berechnet man den Abstand d von M zu der Geraden, entlang derer die Stange im Modell verläuft. Genau dann, wenn sich $d = 4$ ergibt, berührt die Stahlkugel die Stange. (Das obere Ende der Stange befindet sich 0,9 m über der Deckfläche und der Durchmesser der Kugel ist nur 0,8 m.)

d) Untersuchung auf Anbringen einer Holzplatte

Die Gleichung der Geraden, entlang derer die Stange im Modell verläuft, ist

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Der Schnitt mit der Ebene E führt auf $3 \cdot (11 + 3t) + 4 \cdot (6 - 6t) = 84$ mit der Lösung $t = -1{,}8$.

Für alle Punkte, die im Modell auf der Stange liegen, gilt $t \geq -1{,}5$. Somit lässt die Lage der Stange das Anbringen der Holzplatte zu.

Aufgabe Geo 2

a) Gleichung von g_1

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 7$$

Koordinaten der Position

Durch Wahl des Parameters $t=7$ erhält man als Position von U_1 um 12:27 Uhr: $P_7(18\,|\,-7\,|\,-5)$.

Geschwindigkeit

$\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\frac{60}{10}\cdot\frac{1}{1{,}852}\approx 11{,}68$. Die Geschwindigkeit beträgt ca. 11,68 Knoten.

b) Beschreibung des Vorgehens

Man zeigt, dass die Richtungsvektoren der Geraden g_1 und g_2 keine Vielfachen voneinander sind (die Geraden sind nicht parallel) und dass die Gleichung $\overrightarrow{OP_0}+r\cdot\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{OQ_0}+s\cdot\overrightarrow{Q_0Q_1}$ keine Lösung hat (die Geraden schneiden sich nicht).

c) Abstand von R zu g_2

Gleichung der Geraden $g_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\9\\-15\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$. Die Hilfsebene $H:-2x_1-3x_2+2x_3=-45$ ist senkrecht zu g_2 und enthält den Punkt R.

Als Schnittpunkt von g_2 und H ergibt sich für $t=2$ der Punkt $F(7\,|\,3\,|\,-11)$.

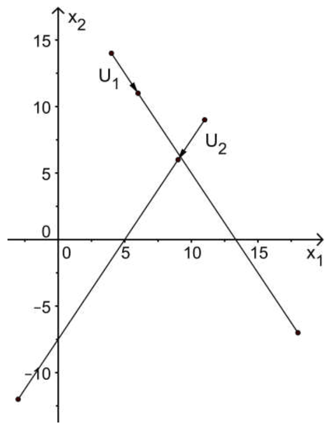
Es gilt $\left|\overrightarrow{RF}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-2\\-6\end{pmatrix}\right|=7$. Damit hat R von g_2 den Abstand 7.

Begründung

Der Abstand von R zu g_2 ist die kürzeste Entfernung eines Punktes von g_2 zu R. Das U-Boot U_1 muss sich jedoch nicht um 12:23 Uhr an dieser Position befinden.

d) Projektion

siehe Abbildung



Begründung

Die beiden Geraden, entlang derer sich die beiden U Boote im Modell bewegen, schneiden sich zwar in beiden Projektionen, die x_2-Koordinaten der zugehörigen Schnittpunkte stimmen jedoch nicht überein.

Aufgabe Geo 3

a) Schnittpunkt von g_4 und E

Der Schnitt von g_4 und E führt auf die Gleichung $3(5+4t)+6(1+t)+4=16$ mit der Lösung $t=-\frac{1}{2}$. Der Schnittpunkt ist $S(3\,|\,0{,}5\,|\,1)$.

Zu g_4 orthogonale Gerade der Schar

Für den Richtungsvektor der gesuchten Geraden gilt $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a + 1 = 0$.

Daraus folgt $a = -\frac{1}{4}$. Also ist die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ orthogonal zur Geraden g_4.

b) Schnittwinkel von g_4 und E

Für den Schnittwinkel α gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{17}\sqrt{61}}$. Damit ist $\alpha \approx 34{,}0°$.

Schnittwinkel der Weite 10°

Für den Schnittwinkel α_a von g_a und E gilt: $\sin(\alpha_a) = \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$.

Mit der Gleichung $\frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} = \sin(10°)$ lässt sich der gesuchte Wert von a bestimmen.

c) Begründung, dass alle Geraden g_a in F liegen

Jeder Punkt jeder Geraden der Schar hat die Koordinaten $P_a(5 + a \cdot t \,|\, 1 + t \,|\, 1)$.

Also hat jeder dieser Punkte die x_3-Koordinate 1.

Damit liegen alle Geraden der Schar in der Ebene $F : x_3 = 1$.

Gleichung der Geraden h

Ansatz: $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Da h in F liegt, gilt: $v_3 = 0$. Damit h nicht zur Schar gehört, darf $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein. Dies führt auf $v_2 = 0$.

Eine mögliche Gleichung ist damit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Geo 4

a) Koordinatengleichung der Ebene E, die die Lage der Markise beschreibt

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

Da der Punkt A in E liegt, ergibt sich $E: x_2 + 3x_3 = 12$.

Winkel zwischen Markise und Hauswand

Für den Winkel α zwischen der Ebene E und der x_1x_3-Ebene gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$. Damit ist $\alpha \approx 71{,}6°$.

b) Überprüfung auf Berührung

Das obere Ende der Stablampe befindet sich im Punkt $L(5\,|\,2\,|\,0{,}3)$.

Der Abstand der Punkte L und C ist $d(L;C) = \left|\overrightarrow{LC}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}9 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1{,}9^2 + 2{,}4^2} \approx 3{,}06 > 2{,}7$.

Der Regenschutz kann die Stablampe nicht berühren.

Maximaler Abstand zur Hauswand

Das obere Ende der Stablampe befindet sich im Punkt $L_a(5\,|\,a\,|\,0{,}3)$.

$$d(L_a;\, C) = \left|\overrightarrow{L_aC}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 - a \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(3{,}9 - a)^2 + 2{,}4^2} .$$

Die Gleichung $d(L_a;\, C) = 2{,}7$ führt auf $a^2 - 7{,}8a + 13{,}68 = 0$ mit den Lösungen $a_1 \approx 2{,}66$ und $a_2 \approx 5{,}14$.

Da die Terrasse 4 m breit ist, kommt nur die erste Lösung in Frage.

Die Stablampe darf höchstens 2,66 m von der Hauswand entfernt stehen.

c) Begründung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird

Die x_2-Koordinate von $\vec{v}$ ist negativ.

Die x_2-Koordinate der Punkte C und D ist kleiner als die der Punkte R und S.

Damit reicht der Schatten, den die Markise wirft, nicht bis zur äußeren Terrassenkante RS.

Neue Koordinaten der äußeren Eckpunkte

Der Schatten reicht nun bis zum Punkt $M_{QR}(5|2|0)$. Einen Punkt des Markisenrands in der neuen Position erhält man durch Schnitt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E.

Für $t = -1$ ergibt sich der Schnittpunkt $T(4|3|3)$.

Die gesuchten Punkte C* bzw. D* haben die gleichen x_1-Koordinaten wie C bzw. D.
Damit erhält man $C^*(5|3|3)$ und $D^*(0|3|3)$.

Aufgabe Sto 1

a) Wahrscheinlichkeiten

X: Anzahl des Auftretens der Farbe Blau, X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{4}$.

$P(A) = P(X = 4) \approx 0{,}146$

$P(B) = P(X \geq 4) \approx 0{,}224$

b) Mindestanzahl der Drehungen

Y: Anzahl des Auftretens von blau, Y ist binomialverteilt mit unbekanntem Parameter n und $p = \frac{1}{4}$.

Zu bestimmen ist die kleinste Zahl n mit $P(Y \geq 1) > 0{,}99$.

Der WTR liefert für $n = 16$: $P(Y \geq 1) \approx 0{,}990$

für $n = 17$: $P(Y \geq 1) \approx 0{,}992$

Man muss das Glücksrad mindestens 17-mal drehen.

c) Wahrscheinlichkeit für Verlust

Der Spieler macht Verlust, wenn drei verschiedene Farben erscheinen, somit gilt:

$P(\text{"Verlust"}) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

d) Wert von p

Die Funktion f beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, in Abhängigkeit von p.

Es ist $f(p) = 6 \cdot p \cdot 2p \cdot (1 - p - 2p) = 12p^2 \cdot (1 - 3p) = 12p^2 - 36p^3$, $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$

Bestimme p so, dass $f(p)$ maximal ist.

$f'(p) = 24p - 108p^2 = 108p \cdot (\frac{2}{9} - p)$, somit gilt $f'(p) = 0$ für $p = 0$ (irrel.) und $p = \frac{2}{9}$.

Da $f(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler Verlust macht, für $p = \frac{2}{9}$ maximal.

Aufgabe Sto 2

a) <u>Wahrscheinlichkeiten</u>

Da spätestens die vierte aufgedeckte Karte ein Joker ist, gilt

$P(A) = P(\{\bar{J}J, \bar{J}\bar{J}\bar{J}J\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}$ (J: Joker, $\bar{J}$: kein Joker)

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$

b) <u>Wahrscheinlichkeit für mindestens 10 Gewinne</u>

X: Anzahl der Gewinne, X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = \frac{1}{4}$.

$P(X \geq 10) \approx 0{,}836$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens zehn Mal gewinnt, beträgt 83,6 %.

<u>Mindestanzahl der Gewinnfelder</u>

Y: Anzahl der Gewinne, Y ist binomialverteilt mit n = 50 und unbekanntem p.
Bestimme p so, dass $P(Y \geq 10) \geq 0{,}95$, also $P(Y \leq 9) \leq 0{,}05$.

Durch systematisches Probieren erhält man

bei 8 Gewinnfeldern, d.h. $p = \frac{8}{30}$, die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq 9) \approx 0{,}107$,

bei 9 Gewinnfeldern, d.h. $p = \frac{9}{30}$, die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq 9) \approx 0{,}040$.

Es müssen mindestens 9 Felder als Gewinnfelder markiert werden.

c) <u>Wahrscheinlichkeit für Sonne</u>

Z: Gewinn in Euro, p: Wahrscheinlichkeit für Sonne

k	1	0	-1
$P(Z = k)$	p^2	$(1-p)^2$	$2 \cdot p \cdot (1-p)$

$E(X) = p^2 - 2 \cdot p \cdot (1-p) = 3p^2 - 2p = p \cdot (3p - 2)$
Das Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist.

$p_1 = 0$ (Sonne erscheint nie, irrelevant), $p_2 = \frac{2}{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit für Sonne muss $p = \frac{2}{3}$ sein, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe Sto 3

a) <u>Wahrscheinlichkeiten</u>
X ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = 0{,}9$.

$P(E_1) = P(X = 150) \approx 0{,}031$

$P(E_2) = P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) \approx 0{,}036$

$P(E_3) = 1 - P(E_2) \approx 0{,}964$

b) <u>Maximale Zahl der Reservierungen</u>

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0{,}9$.

Gesucht ist die größte Zahl n mit $P(X > 150) < 0{,}01$, also mit $P(X \leq 150) > 0{,}99$.

Der WTR liefert für $n = 158$: $P(X \leq 150) \approx 0{,}992$

für $n = 159$: $P(X \leq 150) \approx 0{,}982$

Die Hotelleitung darf höchstens 158 Reservierungen annehmen.

c) <u>Entscheidungsregel</u>

Y: Anzahl der Gäste, welche die Sauna nutzen würden

Stichprobenumfang $n = 300$, $\alpha = 0{,}05$

$H_0: p \leq 0{,}2$, $H_1: p > 0{,}2$ (rechtsseitiger Test)

Falls H_0 zutrifft, ist Y im Extremfall binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}2$.

Zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs ermittelt man die kleinste Zahl k mit $P(Y \geq k) \leq 0{,}05$, also $P(Y \leq k-1) \geq 0{,}95$. Mit dem WTR erhält man: $P(Y \leq 71) \approx 0{,}949$, $P(Y \leq 72) \approx 0{,}962$.

Somit gilt $k - 1 = 72 \Leftrightarrow k = 73$, Ablehnungsbereich $\{73,...,300\}$.

Entscheidungsregel: Wenn mindestens 73 der 300 befragten Gäste die Sauna nutzen würden, wird H_0 abgelehnt, andernfalls wird H_0 nicht abgelehnt.

d) <u>Überlegungen zur Konzeption</u>

Durch den Hypothesentest kann die Wahrscheinlichkeit der fälschlichen Ablehnung der Nullhypothese begrenzt werden. In vorliegenden Test bedeutet die fälschliche Ablehnung von H_0, dass man davon ausgeht, dass mehr als 20 % der Gäste die Sauna nutzen würden, obwohl das nicht zutrifft. Die Folge daraus wird durch Überlegung II beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Fall II kann also durch den obigen Test auf 5 % begrenzt werden.

Aufgabe Sto 4

a) <u>Wahrscheinlichkeit</u>

Der Abbildung kann man entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person Abitur hat, etwa 44 % beträgt. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person kein Abitur hat, etwa 56 %.

<u>Vereinbarkeit der Aussage mit den Daten</u>

Da die Abbildung nur Informationen über die Anteile der Personen mit bestimmten Abschlüssen innerhalb der jeweiligen Altersgruppe enthält, lassen sich keine Aussagen über die absoluten Anzahlen dieser Personen machen. Die Aussage lässt sich also durch die Daten nicht widerlegen und steht somit mit ihnen im Einklang.

b) <u>Begründung</u>

Wegen der großen Grundgesamtheit ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis bei mehreren Befragten annähernd gleich. Durch die zufällige Auswahl kann man zusätzlich davon ausgehen, dass die Ergebnisse der Befragungen unabhängig voneinander sind.

<u>Wahrscheinlichkeiten</u>

X beschreibt die Anzahl der Personen mit Abitur, X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}25$.

$P(A) = P(X = 6) \approx 0{,}169$

$P(B) = P(X \leq 4) \approx 0{,}415$

c) Wahrscheinlichkeit Ereignis C

$P(C) = 0{,}8^{10} \approx 0{,}107$

Wahrscheinlichkeit Ereignis D

Y: Anzahl der Personen, die mittlere Reife haben und bestehen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$.

Z: Anzahl der Personen, die keine mittlere Reife haben und bestehen
Z ist binomialverteilt mit $n = 2$ und $p = 0{,}6$.
Das Ereignis D setzt sich aus den disjunkten Ereignissen $\{Y = 10 \text{ und } Z = 2\}$, $\{Y = 10 \text{ und } Z = 1\}$ und $\{Y = 9 \text{ und } Z = 2\}$ zusammen.

$$\begin{aligned} P(D) = P(Y + Z \geq 11) &= P(Y = 10) \cdot P(Z = 2) + P(Y = 10) \cdot P(Z = 1) + P(Y = 9) \cdot P(Z = 2) \\ &= 0{,}8^{10} \cdot 0{,}6^2 + 0{,}8^{10} \cdot 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6^2 \\ &\approx 0{,}187 \end{aligned}$$

Aufgabe Sto 5

a) Wahrscheinlichkeit für vier Treffer

Die Wahrscheinlichkeit für das betrachtete Ereignis ist $5 \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}360$.

Der Athlet trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal.

b) Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Strafrunde

Zu berechnen sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Der Athlet trifft immer.
B: Der Athlet trifft liegend einmal nicht und stehend immer.
C: Der Athlet trifft liegend immer und stehend einmal nicht.
Es gilt: $P(A) = 0{,}93^5 \cdot 0{,}88^5$, $P(B) = 5 \cdot 0{,}93^4 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}88^5$ und $P(C) = 0{,}93^5 \cdot 5 \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(A) + P(B) + P(C) \approx 0{,}756$.

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal eine Strafrunde laufen zu müssen, ist ca. 75,6 %.

c) Fragestellung

Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss der Athlet im Stehendschießen mindestens erreichen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % bei fünf Schüssen mindestens vier Mal trifft.

Aufgabe Sto 6

Alle Fortgeschrittenenpaare sind anwesend

$0{,}75^4 \approx 0{,}316$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 32 % sind an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend.

Mindestens 6 Anfänger- und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare sind anwesend

Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben jeweils die Anzahl der Anfänger- bzw. Fortgeschrittenen-paare, die an einem Abend anwesend sind.
X und Y sind binomialverteilt mit den Parametern $n = 8$ und $p = 0{,}9$ bzw. $n = 4$ und $p = 0{,}75$.
$P(X \geq 6) \cdot P(Y \leq 3) \approx 0{,}658$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65,8 % sind an einem Abend mindestens 6 Anfänger- und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend.

Mindestens 11 Paare sind anwesend

Mindestens 11 Paare sind anwesend, wenn alle 8 Anfängerpaare und 3 Fortgeschrittenenpaare oder 7 Anfängerpaare und alle 4 Fortgeschrittenenpaare oder alle Paare anwesend sind.
$P(X = 8) \cdot P(Y = 3) + P(X = 7) \cdot P(Y = 4) + P(X = 8) \cdot P(Y = 4) \approx 0{,}439$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind, beträgt ca. 43,9 %.